



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دکتری
ریاضی محض

انفجار جواب در مدل های تاکتیسیم شیمیایی

نگارش

محسن شریفی تبار

استاد راهنما

دکتر محمود حصارکی

۱۴ مهر ۱۳۸۹

این تحفه ناچیز را به امام سومین شیعیان تقدیم می‌کنم،
او که عشق را به مطلق کلمه معنا کرد، و او که عشق و معشوق ازلی و ابدی است؛

جان به قربان ذبیحی که به قربان که عشق
بالب تشنه روان می‌شد و خود دریا بود

و تقدیم به بی‌کران مهر و عطوفت، او که عالم در انتظار و دل تنگی اوست

دل‌جزمهر مه‌رویان طریقی بر نمی‌گیرد
زهردری دهم‌پندش ولیکن در نمی‌گیرد
خدارا ای نصیحت‌گو حدیث‌ساغروی‌گو
که نقشی در خیال ما از این خوش‌تر نمی‌گیرد

قدردانی

از استاد راهنمای عزیزم جناب آقای دکتر محمود حصارکی، بابت قبول راهنمایی رساله و کمک‌های علمی، و همچنین بابت جذب حمایت مالی، تشکر می‌کنم. از زحمات بی‌دریغ دکتر عطارد کاویان که در تهیه این رساله، حمایت‌های علمی و مخصوصاً پشتیبانی اداری ایشان شامل حال من بود، تشکر ویژه دارم.

در اینجا بایستی از دو همکار فرانسوی خود در طول دوران رساله، یعنی دکتر بنوا پرتام* و دکتر ونسان کلوز# تشکر کنم. این دو نفر در قسمت اول رساله با بنده همکاری علمی داشتند و پیشنهاد مسأله قسمت مدل جنبشی، توسط دکتر ونسان کلوز صورت گرفت.

جا دارد از دوستان عزیزم آقایان میرامید حاجی میرصادقی، دکتر کسری علیشاهی، دکتر مرتضی فتوحی و مهندس حسین علیزاده بابت حمایت‌های بی‌دریغ روحی‌شان تشکر کنم.

با توجه به اینکه حروف‌چینی این رساله را با کمک بسته XePersian روی L^AT_EX انجام داده‌ام، بر خود لازم می‌بینم که از طراح این بسته یعنی جناب آقای وفا خلیقی تشکر کنم.

از پدر و مادرم سپاس‌گذارم که در تمام دوران زندگی، یاور و همراه من بوده‌اند و زحمات آنها، یقیناً پایه‌گذار هر آنچه در حیاتم اتفاق می‌افتد خواهد بود.

از همسر مهربان و گران‌قدرم تشکر می‌کنم که در دوران تهیه این رساله، تمام کاستی‌های زندگی را به جان خرید و تا آخرین لحظه، پشتیبان و یاورم بود.

و شکرگزار خدای عظیم و مهربان هستم، که در تمام طول زندگی و خصوصاً تهیه این رساله، ردپای اراده خود را به من نشان داد و از الطاف و رحمت خاص خودش بی‌نصیبم ن ساخت،

که هر چه داریم از اوست و برای اوست.

*Benoît Perthame

#Vincent Calvez

انفجار جواب در مدل‌های تاکتیسیم شیمیایی

چکیده

مسئله حرکت سلول‌های زنده در یک محیط، در مثال‌های زیادی کاربرد دارد. به عنوان نمونه می‌توان از رشد کپک‌ها، رشد تومورها، ترمیم زخم و تشکیل طرح‌های رنگی پوست حیوانات نام برد. برای مدل‌سازی مسئله، راه‌های زیادی پیشنهاد شده است و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی* به طور گسترده‌ای برای بررسی این گونه مسائل به کار گرفته شده است.

در اینجا می‌خواهیم دو مدل شناخته‌شده را مورد بررسی قرار دهیم. ابتدا مدل ماکروسکوپی «کِلر-سیگل»[#] و سپس مدل جنبشی «اوتمر-دونبار-آلت»[†] را در نظر خواهیم گرفت. از آنجا که این مدل‌ها در فضای دو بعدی رفتار بسیار خوبی دارند که در دیگر ابعاد موجود نیست، آنها را به گونه‌ای تصحیح می‌کنیم که در تمامی ابعاد، همان رفتار مناسب را داشته باشند. در ضمن مدل‌های شناخته شده، اصولاً در یک بُعد خوش‌رفتار نیستند و دینامیک لازم را ارائه نمی‌دهند و لذا مدل ارائه‌شده در اینجا این مزیت را دارد که در بُعد یک نیز اعمال می‌شود و به سادگی می‌توان شبیه‌سازی عددی برای به دست آوردن جواب‌ها انجام داد. همچنین دو فصل از این رساله مستقلاً ارزشمند است که به بررسی خواص فضاهای سوپرفریم در یک بُعد و تبدیل فوریه و هیلبرت گسسته می‌پردازد.

واژه‌های کلیدی: بیولوژی، انفجار جواب، تاکتیسیم شیمیایی، تبدیل هیلبرت، شبیه‌سازی عددی، تبدیل فوریه گسسته.

*Partial Differential Equations

#Keller–Segel

†Othmer–Dunbar–Alt

فهرست مطالب

| | | |
|----|--|----|
| ۱ | مقدمه | ۱ |
| ۱ | ۱-۱ معرفی مسأله | ۱ |
| ۳ | ۲-۱ تعاریف و نمادگذاری‌های عمومی | ۳ |
| ۷ | ۳-۱ ابزارها و نابرابری‌های کلاسیک | ۷ |
| ۱۰ | ۲ مدل تصحیح‌شده کلر-سیگل | ۱۰ |
| ۱۰ | ۱-۲ مقدمه و معرفی مدل کلاسیک | ۱۰ |
| ۱۴ | ۲-۲ معرفی مدل تصحیح‌شده | ۱۴ |
| ۱۵ | ۳-۲ کاربردها در علوم دیگر | ۱۵ |
| ۱۶ | ۳ تحلیل مدل در کل فضای اقلیدسی | ۱۶ |
| ۱۶ | ۱-۳ تحول سیستم | ۱۶ |
| ۱۹ | ۲-۳ وجود جواب سراسری برای پایین جرم بحرانی | ۱۹ |
| ۲۵ | ۳-۳ جواب ضعیف و انفجار | ۲۵ |
| ۲۶ | ۴-۳ تخمین‌ها در فضای L^p | ۲۶ |
| ۲۹ | ۵-۳ کران در فضای L^∞ | ۲۹ |
| ۳۰ | ۴ تحلیل مدل در یک دامنه کران‌دار | ۳۰ |
| ۳۰ | ۱-۴ توسعه چگالی با صفر | ۳۰ |
| ۳۵ | ۲-۴ توسعه چگالی با مقدار میانگین | ۳۵ |
| ۳۷ | ۳-۴ بُعد ۱ و محیط متناوب | ۳۷ |
| ۳۹ | ۴-۴ محاسبات عددی در بُعد ۱ | ۳۹ |
| ۴۴ | ۵ برخی خواص فضاهای سوبولوف در بُعد ۱ | ۴۴ |
| ۴۴ | ۱-۵ نامساوی‌های دقیق برای فضای سوبولوف | ۴۴ |
| ۴۷ | ۲-۵ خواص فضای سوبولوف کسری | ۴۷ |
| ۵۰ | ۶ تبدیل فوریه و هیلبرت گسسته | ۵۰ |
| ۵۰ | ۱-۶ تعاریف و مقدمات | ۵۰ |

| | | |
|----|-------|-------------------------------------|
| ۵۲ | | ۲-۶ همگرایی تبدیل فوریه گسسته |
| ۵۶ | | ۷ معادله جنبشی سلول‌ها |
| ۵۶ | | ۱-۷ معرفی دستگاه معادلات جنبشی |
| ۶۰ | | ۲-۷ نمادگذاری‌ها |
| ۶۳ | | ۸ مدل تصحیح‌شده جنبشی |
| ۶۳ | | ۱-۸ وجود و یکتایی |
| ۷۰ | | ۲-۸ تخمین زمان وجود جواب |
| ۷۴ | | ۹ انفجار جواب و تمهیدات عددی |
| ۷۴ | | ۱-۹ تمهیدات عددی |
| ۷۸ | | ۲-۹ شبیه‌سازی عددی |
| ۸۲ | | ۳-۹ انفجار جواب |
| ۸۳ | | ۴-۹ بررسی نمایه انفجار |
| ۸۵ | | مراجع |

فهرست تصاویر

| | | |
|----|---|-----|
| ۲ | حرکت باکتری‌ها در یک محیط | ۱.۱ |
| ۴۰ | دو توده جرم، مدل ماکروسکوپی، محیط متناوب | ۱.۴ |
| ۴۱ | دو توده جرم، مدل ماکروسکوپی، توسعه با صفر | ۲.۴ |
| ۴۱ | دو توده جرم، مدل ماکروسکوپی، توسعه با میانگین | ۳.۴ |
| ۴۳ | حالت ایستا، مدل ماکروسکوپی، توسعه با صفر | ۴.۴ |
| ۷۹ | دو توده جرم، مدل جنبشی | ۱.۹ |
| ۷۹ | حرکت دو توده با جرم مساوی به سمت هم، مدل جنبشی | ۲.۹ |
| ۸۰ | حرکت دو توده با جرم متفاوت به سمت هم، مدل جنبشی | ۳.۹ |
| ۸۱ | یک توده جرم، مدل جنبشی | ۴.۹ |

پیش‌گفتار

حرکت سلول‌ها و موجودات زنده در یک محیط در مسائل مختلفی ظاهر می‌شود، از جمله رشد غدد سرطانی و تومورهای مغزی، ترمیم زخم‌ها، رشد جنین، شکل‌گیری طرح‌های رنگی پوست جانوران، تشکیل کولونی‌های باکتری‌ها و غیره. استفاده از نظریه معادلات دیفرانسیل برای مدل‌سازی این‌گونه مسائل، به خوبی شناخته شده است و سعی بر این است که با ارائه مدل‌های مناسب و کارآمد که با تجربه‌های پیشین و آزمایشگاهی سازگار باشند، موفق به پیش‌بینی رفتارها و الگوها در این مسائل شویم. در بسیاری از این مسائل، حرکت ارگانیسم‌های زنده، تحت تأثیر یک ماده شیمیایی است. همچنین رفتار مورد توجه در بسیاری از این موارد این است که آیا سلول‌های زنده در نقاطی تجمع می‌کنند یا نه.

در اینجا توضیح مختصری از قالب این رساله ارائه می‌کنیم. فصل ۱، شامل یک مقدمه است و تعاریف و نمادگذاری‌های عمومی را معرفی می‌کنیم که در طول این رساله از آنها استفاده خواهیم کرد. در فصل ۲، به معرفی مدل کلاسیک ماکروسکوپی «کلر-سیگل»^{*} برای این‌گونه مسائل می‌پردازیم و سپس بر اساس نیاز مطرح‌شده در آنجا، سعی در تصحیح آن می‌کنیم. فصل ۳ به تحلیل مدل تصحیح‌شده در کل فضای حقیقی می‌پردازد و بررسی این مدل در یک دامنه کران‌دار، در فصل ۴ انجام می‌شود. فصول بعدی به یک مدل جنبشی خواهند پرداخت. ابتدا در فصل‌های ۵ و ۶ ابزارهای مورد استفاده در ادامه را معرفی و مطالعه می‌کنیم که این ابزارها مستقلاً هم جالب هستند و خواننده در مطالعه اولیه می‌تواند از آنها چشم‌پوشی کند. سپس در فصل ۷ مدل کلاسیک جنبشی «اوتمر-دونبار-آلت»[#] را معرفی می‌کنیم و باز هم اصلاحیه‌ای مشابه قبل برای آن مطرح می‌کنیم. در فصل ۸ به تحلیل این مدل در فضای یک بعدی می‌پردازیم و در انتها، فصل ۹ به بررسی رفتار جواب‌ها و شبیه‌سازی عددی اختصاص می‌یابد.

^{*}Keller-Segel

[#]Othmer-Dunbar-Alt

۱ مقدمه

در این فصل ابتدا مسأله مورد نظر را از دیدگاه علم زیست‌شناسی معرفی می‌کنیم. سپس نمادگذاری‌های ریاضی و تعاریف عمومی را که در تمام رساله از آنها استفاده می‌شود، بیان خواهیم کرد.

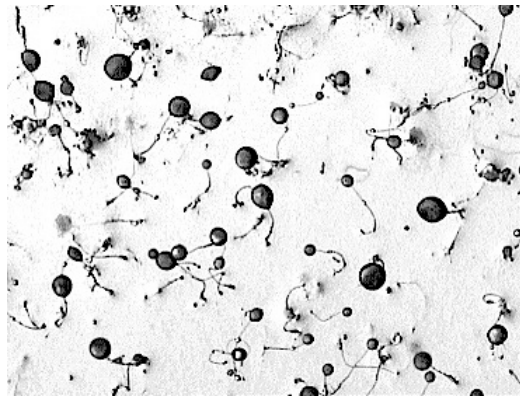
۱-۱ معرفی مسأله

مسأله مورد بررسی در این رساله، مدل‌هایی در مورد حرکت ارگانیسم‌های زنده در یک محیط است. یکی از مشخصات ارگانیسم‌های زنده این است که می‌توانند محیط اطراف خود را حس کنند و بسته به شرایط، به آن پاسخ دهند. البته میزان درک هر نوع ارگانیسم زنده از محیط اطراف و همچنین نوع و شدت پاسخ به محرک‌های خارجی، بسیار متفاوت است. میزان درک موجود زنده، تحت تأثیر تکامل زیستی آن و به خصوص اندازه موجود زنده خواهد بود. در این رساله، به حالت‌هایی علاقه‌مند هستیم که این موجودات زنده در حال حرکت هستند و واکنش آنها نسبت به محرک خارجی، بر نوع حرکت آنها تأثیرگذار است. این تأثیر می‌تواند از جنس‌های مختلف باشد، مانند تغییر سرعت، تغییر مسیر و غیره. این پاسخ به محرک در علم زیست‌شناسی به «تاکتیسیم»^{*} معروف است. این لغت، یک کلمه یونانی است که معنای آن «تجدید آرایش» است. انواع مختلفی از تاکتیسیم شناخته شده است که یکی از مشهورترین آنها «تاکتیسیم شیمیایی»[#] است، به این معنی که سلول، به یک محرک شیمیایی پاسخ می‌دهد.

برای اینکه اهمیت این مسأله را روشن کنیم، به بیان چند مثال می‌پردازیم. یک مثال ابتدایی، پیدا کردن غذا توسط یک انسان یا حیوان است. در این مثال، بوی غذا به عنوان محرک شیمیایی در نظر گرفته می‌شود. در این مثال با یک موجود زنده با اندازه بزرگ مواجه هستیم. مثالی دیگر می‌تواند حرکت مورچه باشد که در پاسخ به ردپایی است که هم‌دسته‌ای‌ها از خود به جای گذاشته‌اند. مثال ریزتر، حرکت انواع زیادی از باکتری‌ها در یک محیط است که تنوع زیادی نیز در محرک شیمیایی وجود خواهد داشت.

پاسخ به چنین محرکی می‌تواند از دو جنس مختلف باشد. اولی اینکه این ماده شیمیایی از جنس غذا برای سلول زنده باشد و یا اینکه یک سیگنال شیمیایی که سلول‌ها برای جذب کردن یکدیگر در محیط ترشح می‌کنند. در چنین حالتی پاسخ به این محرک، مثبت است. اما این ماده شیمیایی می‌تواند به عنوان نمونه، یک سم باشد و در این حالت پاسخ سلول، منفی خواهد بود.

*Taxis #Chemotaxis



شکل ۱.۱: حرکت باکتری‌ها در یک محیط

در هر حال، معمولاً این پاسخ به محرک، سه جزء اصلی خواهد داشت. ابتدا سیگنال خارجی، سپس مکانیسمی که این سیگنال خارجی را به یک سیگنال داخلی تبدیل کند، و در نهایت یک ساختار داخلی که باعث تغییر رفتار حرکتی موجود شود. برای انجام این مکانیسم‌ها، یک موجود زنده دو رویکرد متفاوت می‌تواند داشته باشد که در اینجا با ذکر مثال سعی در روشن کردن مطلب خواهیم داشت. در ابتدا به همان مثال پیدا کردن غذا توسط انسان می‌پردازیم که مثال مشهوری در این زمینه است. فرض کنید که شخصی به دنبال یک نانویی می‌گردد و نسبتاً هم به آن نزدیک است، اما دقیقاً نمی‌داند که نانویی کجاست و فقط می‌تواند بوی نان را احساس کند. اگر این شخص دو نشان‌گر بسیار حساس بو به همراه داشته باشد و آنها را در دو انتهای بازوی خود قرار دهد، می‌تواند به کمک این دو، جهتی را که در آن بو زیاد می‌شود را تشخیص دهد و در آن راستا حرکت کند. قاعدتاً این فرض‌ها خارج از واقعیت است و لذا انسان استراتژی دوم را در پیش خواهد گرفت: شخص در نقطه‌ای که هست بو می‌کشد و به سمتی حرکت می‌کند و دوباره بو می‌کشد. اگر بوی بیشتری احساس کرد، مسیر خود را ادامه می‌دهد، وگرنه مسیر حرکت خود را عوض می‌کند. سلول‌هایی که مسیر حرکت خود را با استراتژی اول مشخص می‌کنند مشهور به سلول‌های «آمیبی شکل»^{*} هستند. همیشه فرض بر این است که این نوع سلول‌ها در جاهای مختلف غشای سلولی خود، نشان‌گر دارند و آن‌قدر بزرگ هستند که بتوانند تمایز سیگنال را در نقاط مختلف غشای خود تشخیص دهند. سلول‌های کوچک‌تر مانند انواعی از باکتری‌ها، نمی‌توانند چنین مکانیسمی را داشته باشند زیرا نمی‌توان انتظار داشت که به طور مؤثری بتوانند تفاوت اندازه سیگنال را در اطراف خود تشخیص دهند. برعکس، این تمایز را به کمک استراتژی دوم و حرکت در محیط سیگنال شیمیایی اندازه‌گیری می‌کنند.

در هر دو حالت، موضوعی برای درک بهتر مسأله مطرح می‌شود و آن هم اینکه آیا سلول‌ها فقط سیگنال شیمیایی را درک می‌کنند یا اینکه به نوعی در آن دخیل و تصرف هم خواهند داشت، به واسطه مصرف کردن سیگنال، مثلاً در حالتی که سیگنال مورد نظر غذای سلول است، و یا تقویت سیگنال در اطراف خود، مثلاً در حالتی که سیگنال شیمیایی مورد نظر مانند حرکت مورچه‌ها وظیفه اطلاع به بقیه سلول‌ها را دارد و یا

*Amoeboid

هر حالت مورد تصور دیگر. اگر حالت اولی باشد و سلول‌ها فقط پاسخ به محرک شیمیایی دهند، معادلات حاکم بر سلول‌ها و محرک شیمیایی از هم جدا خواهند شد که البته معمولاً چنین نیست و لذا یک دستگاه معادلات به هم وابسته خواهیم داشت.

یکی از ارگانیسیم‌هایی که به عنوان مثالی برای استراتژی دوم تقریباً به خوبی شناخته شده است، باکتری "Escherichia coli" است. این باکتری دو نوع حرکت کاملاً متفاوت دارد. اولی که یک حرکت کم و بیش منظم و خطی است و به نام «پیمایش»^{*} شناخته می‌شود. دومی حرکتی کاملاً نامنظم است که «چرخش»[#] نام دارد و در واقع بیش از اینکه منجر به جابه‌جایی باکتری شود، باعث تغییر جهت حرکت است. از آنجا که این باکتری بسیار کوچک است و نمی‌تواند تمایز سیگنال را در اطراف غشای خود حس کند، بعد از هر چرخش، اساساً یک مسیر تصادفی را انتخاب می‌کند. زمان حرکت پیمایشی عموماً بسیار بیشتر از حرکت چرخش است و هر زمانی که باکتری در مسیر درست قرار می‌گیرد، زمان پیمایش نیز زیاد خواهد شد. این رفتارها موجب می‌شود که در ابعاد زمانی مناسب و با نگاه میکروسکوپی، این باکتری یک قدم زدن تصادفی در فضا انجام دهد که یک رانش[†] در امتداد مسیر دل‌خواه باکتری نیز وجود دارد. از روی این مثال، این نوع از حرکت به «چرخش و پیمایش» مشهور است.

از طرف دیگر، حرکت سلول‌های آمیبی شکل، بسیار پیچیده‌تر خواهد بود. این نوع مسائل در بررسی رشد جنین، ترمیم زخم، واکنش سیستم ایمنی در مقابل باکتری‌های خارجی و شکل‌گیری تومورها بسیار حائز اهمیت می‌شود. مثالی از این نوع ارگانیسیم، "Dictyostelium discoideum" است.

برای مدل‌بندی ریاضی مسأله به کمک معادلات دیفرانسیل، دو نگاه متفاوت می‌توان داشت. اول اینکه نگاه میکروسکوپی به مسأله داشته باشیم و معادلات را فقط برای چگالی سلول‌ها و محرک شیمیایی بنویسیم. ولی در نگاه دوم، سرعت سلول‌ها نیز مورد توجه قرار می‌گیرد و نگاهی بین کاملاً میکروسکوپی و کاملاً میکروسکوپی شکل می‌گیرد که در واقع معادلات در سطح جنبشی[‡] نوشته شده و مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این رساله هر دوی این رویکردها مورد توجه قرار دارند. در واقع فصل‌های ۲ تا ۴ به نگاه میکروسکوپی و بقیه فصول تا آخر به نگاه جنبشی اختصاص دارند. فصول ۵ و ۶ ابزارهایی را معرفی می‌کنند که در قسمت جنبشی مورد استفاده است، اما به طور مستقل هم ارزشمند هستند. در ادامه، ابتدا ابزارها و تعاریف کلاسیک ریاضی مورد استفاده را بیان می‌کنیم.

۱-۲ تعاریف و نمادگذاری‌های عمومی

در این بخش، تعاریف عمومی را که در ادامه رساله استفاده می‌شود، به همراه نمادگذاری‌ها، معرفی خواهیم کرد.

در این رساله از نماد \mathbb{S}^1 به عنوان دایره استفاده خواهیم کرد و مجموعه نقاط بازه $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ، نمایش‌گر عناصر دایره است. عملیات جمع و تفریق برای این نمایش عناصر دایره، به پیمانه ۱ خواهد بود.

*Run #Tumble †Drift ‡Kinetic Level

نمادگذاری $A \lesssim B$ به این معناست که ثابت جهانی C^* وجود دارد به طوری که $A \leq CB$. منظور از ثابت جهانی این است که این ثابت به برخی از پارامترها وابسته نیست. این پارامترها در هر جایگاه، اگر ابهامی در کار باشد، بیان خواهند شد.

جزء مثبت و جزء منفی عدد حقیقی x را به ترتیب به $[x]_+$ و $[x]_-$ نشان خواهیم داد، یعنی،

$$[x]_+ = \max\{x, 0\}, \quad [x]_- = \max\{-x, 0\}.$$

عمل‌گرهای Δ و ∇ به ترتیب به گرادیان و عمل‌گر لاپلاس نسبت به متغیر مکان اشاره می‌کنند. مشتق جزئی نسبت به زمان را هم به ∂_t نمایش می‌دهیم. در صورتی که تابع مورد نظر فقط تابعی از زمان باشد، مشتق کامل آن نسبت به زمان با نماد $\frac{d}{dt}$ نمایان می‌شود.

از نمادگذاری $\|\varphi\|_p$ برای نرم تابع $\varphi \in L^p$ استفاده می‌کنیم. یعنی،

$$\|\varphi\|_p = \left(\int |\varphi|^p \right)^{1/p}, \quad \|\varphi\|_\infty = \max \varphi.$$

همچنین به صورت برداری داریم،

$$\|(\varphi, \psi)\|_p = (\|\varphi\|_p^p + \|\psi\|_p^p)^{1/p},$$

$$\|(\varphi, \psi)\|_\infty = \max\{\|\varphi\|_\infty, \|\psi\|_\infty\}.$$

هرگاه از فضای L^p صحبت می‌کنیم، بسته به شرایط، منظور ما این فضا روی یک دامنه کران‌دار یا کل فضای اقلیدسی یا دایره خواهد بود.

تعریف مزدوج عدد $1 \leq p \leq \infty$ که آن را به p' نشان می‌دهیم، با خاصیت زیر است،

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

در این صورت دوگان[#] فضای L^p ، فضای $L^{p'}$ خواهد بود و نامساوی هولدر برقرار است،

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

تبدیل فوری[†] $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ به چندین شکل با ضرایب مختلف قابل بیان است که ما از تعریف زیر استفاده می‌کنیم،

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi x} \varphi(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

همچنین برای حالت دایره، $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z})$ به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i \xi x} \varphi(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{Z}.$$

*Universal Constant

#Dual

†Fourier Transform

با این شکل از تعریف، این تبدیل، یک ایزومتري* فضای L^2 است،

$$\|\mathcal{F}\varphi\|_2 = \|\varphi\|_2.$$

تبدیل معکوس فوريه (که خواص کاملاً مشابه تبدیل مستقیم دارد) به صورت زیر در می‌آید،

$$\mathcal{F}^{-1}\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \xi x} \psi(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R},$$

و در حالت دایره، سری فوريه را خواهیم داشت،

$$\mathcal{F}^{-1}\psi(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i \xi x} \psi(\xi), \quad x \in \mathbb{S}^1.$$

برای $1 \leq p \leq 2$ ، تبدیل فوريه و معکوس آن، فضای L^p را به طور پیوسته به $L^{p'}$ می‌نگارد،

$$\|\mathcal{F}\varphi\|_{p'} \lesssim \|\varphi\|_p, \quad (1 \leq p \leq 2).$$

به ویژه داریم،

$$\|\mathcal{F}\varphi\|_{\infty} \leq \|\varphi\|_1.$$

پیچش# دو تابع $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ را به $f * g$ نمایش می‌دهیم، یعنی،

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) dy,$$

که این عملگر در هر جایگاه به صورت مناسب بایستی خوش تعریف باشد. پیچش را برای دو تابع روی دایره هم به طریق مشابه نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم،

$$(f * g)(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x - y)g(y) dy.$$

برای خوش تعریف بودن این عملگر پیچش، کافی است که این توابع به ترتیب در دو فضای L^p و L^q باشند که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ باشد. در این صورت با فرض اینکه $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ است، داریم $f * g \in L^r$ و

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

همچنین خواهیم داشت،

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \times \mathcal{F}g.$$

در ضمن اگر تابع K متقارن باشد، یعنی $K(x) = K(-x)$ ، در این صورت

$$\int f K * g = \int g K * f.$$

* Isometry

Convolution

تعریف ۱.۱ (عمل گر لاپلاس کسری). عبارت $(-\Delta)^{1/2}$ ، عمل گری است که نماد فوریه* آن برابر است با $2\pi|\xi|$ ، یعنی،

$$\mathcal{F}((-\Delta)^{1/2}\varphi)(\xi) = 2\pi|\xi|\mathcal{F}\varphi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{Z} \text{ یا } \xi \in \mathbb{R} \text{ تقریبا هر}$$

تعریف فوق در ارتباط نزدیک با تبدیل شناخته شده هیلبرت[#] $L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$ است که به صورت زیر تعریف می شود،

$$\begin{aligned} \mathbb{H}\varphi(x) &= \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(y)}{x-y} dy \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{\varphi(y)}{x-y} dy + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(y)}{x-y} dy \right), \quad x \in \mathbb{R} \text{ تقریبا هر} \end{aligned}$$

تبدیل هیلبرت روی فضای $L^p(\mathbb{R})$ ایزومتری است و به کمک تبدیل فوریه به شکل زیر قابل بیان است،

$$\mathcal{F}(\mathbb{H}\varphi)(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi)\mathcal{F}\varphi(\xi).$$

به کمک این شکل از تعریف، می توان این تبدیل را بر روی $L^p(\mathbb{S}^1)$ نیز بیان نمود. نمایش انتگرالی این تبدیل به صورت زیر خواهد بود،

$$\mathbb{H}\varphi(x) = \text{p.v.} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cot \pi(x-y) \varphi(y) dy,$$

با توجه به این حقیقت که به معنای توزیعها[†] $\cot(\pi x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} -i \operatorname{sgn}(\xi) e^{2\pi i \xi x}$ است. تبدیل هیلبرت، فضای L^p را به طور پیوسته به خودش می نگارد اگر $1 < p < \infty$ باشد،

$$\|\mathbb{H}\varphi\|_p \lesssim \|\varphi\|_p, \quad 1 < p < \infty.$$

نُرم تابعی این تبدیل به p وابسته است و وقتی p به یک یا بی نهایت نزدیک شود، نُرم تابعی تبدیل هیلبرت به بی نهایت میل می کند. این تبدیل، توابع L^1 را به L^1 -ضعیف تبدیل می کند. همچنین اگر تابعی در فضای $L \log L$ باشد، تبدیل هیلبرت آن موضعا انتگرال پذیر خواهد بود. اکنون این تبدیل را کمی عمومیت می بخشیم.

تعریف ۲.۱ (تبدیل هیلبرت تعمیم یافته). برای هر عدد حقیقی $\alpha > 0$ ، تبدیل هیلبرت تعمیم یافته، \mathbb{H}_α ، به صورت زیر تعریف می شود،

$$\mathcal{F}(\mathbb{H}_\alpha\varphi)(\xi) = \frac{-2\pi i \xi}{\alpha + 2\pi|\xi|} \mathcal{F}\varphi(\xi).$$

اگر ابهامی در مقدار α نباشد، برای سادگی نمادگذاری قرار می دهیم $\mathcal{H} = \mathbb{H}_\alpha$.

*Fourier Symbol

#Hilbert Transform

†Distributions

اگر تابعی که تبدیل هیلبرت تعمیم یافته بر آن اثر می کند، تابعی از زمان باشد، آنگاه منظور، تبدیل این تابع نسبت به متغیر مکان خواهد بود در هر مقطع زمانی.

در این نقطه به تعریف فضای سوبولف کسری* یعنی H^s هم اشاره می کنیم. این فضا برای \mathbb{R} و یا \mathbb{S}^1 به وسیله نرم زیر تعریف می شود،

$$\|\varphi\|_{H^s} = \left\| (1 + 4\pi^2|\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}\varphi(\xi) \right\|_2,$$

که در حالت \mathbb{S}^1 ، منظور از $\|\cdot\|_2$ ، نرم فضای دنباله های مربع انتگرال پذیر یعنی $\ell^2(\mathbb{Z})$ است. برای دامنه $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ و $0 < \alpha \leq 1$ ، فضای هولدر $C^{\alpha}(\Omega)$ ، مجموعه توابعی پیوسته روی دامنه Ω است که برای آنها، نرم زیر متناهی است،

$$\|\varphi\|_{C^{\alpha}} = \|\varphi\|_{\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^{\alpha}}.$$

همچنین در اینجا به مفهوم فضای توزیع ها اشاره می کنیم. برای یک دامنه $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ، فضای $\mathcal{D}(\Omega)$ همان فضای توابع هموار با محمل فشرده# روی دامنه Ω است با توپولوژی که به صورت زیر تعریف می شود: گوییم دنباله $\{\varphi_n\}_n$ در این فضا به تابع φ همگراست اگر اولاً مجموعه فشرده $K \subset \Omega$ وجود داشته باشد که شامل محمل تمامی اعضای دنباله باشد و دوم اینکه هر مشتق از هر مرتبه این دنباله، به مشتق نظیر برای تابع φ به صورت یکنواخت روی K همگرا باشد. اکنون فضای توزیع های روی Ω ، فضای دوگان، یعنی $\mathcal{D}'(\Omega)$ خواهد بود.

همچنین فضای سوبولف $W^{\alpha,p}$ ، مجموعه توابعی در L^p است که مشتق ضعیف آنها هم در L^p است و

$$\|\varphi\|_{W^{\alpha,p}} = (\|\varphi\|_p^p + \|\nabla \varphi\|_p^p)^{1/p}.$$

۱-۳ ابزارها و نابرابری های کلاسیک

در این بخش، به معرفی نتایج و نابرابری های کلاسیک که به خصوص در قسمت مدل ماکروسکوپی به کار می آید، می پردازیم.

قضیه ۳.۱ (درون یابی فضاهای L^p). فرض کنید $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$. در این صورت هر تابع f که در اشتراک فضاهای L^p و L^q است، عضو L^r هم خواهد بود و

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\theta} \|f\|_q^{1-\theta}, \quad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

*Fractional Sobolev Spaces

#Compact Support

اثبات. این قضیه، نتیجه مستقیم نابرابری هولدر است، با توجه به اینکه کمیت‌های $p/r\theta$ و $q/r(1-\theta)$ مزدوج یکدیگر هستند،

$$\|f\|_r^r = \int_X |f|^r = \int_X |f|^{r\theta} |f|^{r(1-\theta)} \leq \| |f|^{r\theta} \|_{\frac{p}{r\theta}} \| |f|^{r(1-\theta)} \|_{\frac{q}{r(1-\theta)}} = \|f\|_p^{r\theta} \|f\|_q^{r(1-\theta)},$$

و اثبات کامل است. □

قضیه ۴.۱ (نابرابری لگاریتمی هاردی-لیتلوود-سوبولف*). فرض کنید که تابع $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ نامنفی است که جرم آن برابر M است و همچنین فرض کنید $f(x) \log(1+|x|^\lambda)$ انتگرال پذیر باشد. آنگاه،

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \log|x-y| f(y) dx dy \leq \frac{M}{d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \log f(x) dx + C(d, M).$$

اثبات. [۱۳] را ببینید. □

قضیه ۵.۱ (نابرابری هاردی-لیتلوود-سوبولف). فرض کنید $1 < p, r < d$ و $0 < \lambda < d$ باشد به طوری که داشته باشیم $1/p + \lambda/d + 1/r = 2$. آنگاه برای هر $f \in L^p$ و $g \in L^r$ داریم،

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) |x-y|^{-\lambda} g(y) dx dy \right| \lesssim \|f\|_p \|g\|_r.$$

اثبات. به [۲۸] مراجعه کنید. □

قضیه ۶.۱ (نابرابری گالیاردو-نیرنبرگ-سوبولف). فرض کنید $d > 2$. در این صورت،

$$\|f\|_{\frac{2d}{d-2}} \lesssim \|\nabla f\|_2, \quad \forall f \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

همچنین در حالت $d > 1$ فرض کنید که $1 \leq p < q < 2d/(d-2)$ باشد. در این صورت،

$$\|f\|_q \lesssim \|f\|_p^{-\theta} \|\nabla f\|_2^\theta, \quad \forall f \in H^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d), \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{(d-2)\theta}{2d}.$$

اثبات. [۱۳] را ببینید. نامساوی دوم هم از درون‌یابی به دست می‌آید. □

تعریف ۷.۱ (هسته حرارت). نگاشت $G: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ که هسته حرارت نام دارد، جواب اساسی معادله حرارت روی فضای \mathbb{R}^d است که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$G(t, x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} e^{-|x|^2/2t}.$$

*Logarithmic Hardy-Littlewood-Sobolev Inequality

قضیه ۸.۱ (خواص هسته حرارت). هسته حرارت در هر مقطع زمانی، یک تابع چگالی است،

$$\int_{\mathbb{R}^d} G(t, x) dx = 1.$$

به طور کلی‌تر برای هر $1 \leq p \leq \infty$ داریم،

$$\|G(t, \cdot)\|_p \sim t^{-d/\nu p'}, \quad \|\nabla G(t, \cdot)\|_p \sim t^{-1/\nu - d/\nu p'}.$$

اثبات. از محاسبه مستقیم انتگرال‌ها، نتایج مطلوب حاصل می‌شود. به عنوان نمونه،

$$\begin{aligned} \|G(t, \cdot)\|_p^p &= \frac{1}{(\nu\pi t)^{pd/\nu}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-p|x|^\nu/\nu t} dx \\ &\sim t^{-pd/\nu} t^{d/\nu} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-p|y|^\nu/\nu} dy \\ &\sim t^{-(p-1)d/\nu}. \end{aligned}$$

□

مشابه‌ها حکم مربوط به ∇G به اثبات می‌رسد.

۲ مدل تصحیح شده کلر-سیگل

در این فصل، توجه خود را به نگاه ماکروسکوپی به مسأله معطوف می‌کنیم، به این معنی که سعی می‌کنیم معادلات حاکم بر چگالی ذرات و همچنین چگالی ماده شیمیایی را به دست آوریم تا بتوانیم تحول زمانی این چگالی‌ها را تحلیل کنیم. ابتدا به معرفی یک مدل کلاسیک می‌پردازیم و سپس آن را به گونه‌ای تصحیح می‌کنیم که رفتار مناسب‌تری داشته باشد.

۲-۱ مقدمه و معرفی مدل کلاسیک

در این بخش، نسخه‌های مختلف مدل کلاسیک «کلر-سیگل» را معرفی می‌کنیم و مختصری از مطالعات انجام‌شده روی آنها را بیان خواهیم کرد.

یادآوری می‌کنیم که با مسائلی مواجه هستیم که در آنها، یک رده از سلول‌های زنده، تحت اثر یک ماده شیمیایی، در یک محیط حرکت می‌کنند. از اینجا تا پایان، متغیر n را برای توصیف چگالی این سلول‌ها به کار می‌بریم. همیشه ابعاد فیزیکی مسأله به گونه‌ای است که اندازه سلول‌ها بسیار کوچک‌تر از اندازه محیط است و لذا چگالی سلول‌ها با تقریب بسیار عالی، مفهومی پیوسته دارد. چگالی ماده شیمیایی مورد نظر را هم به S نمایش می‌دهیم.

اکنون سعی در توصیف جریان حرکت سلول‌ها می‌کنیم تا بتوانیم معادلات حاکم بر این متغیرهای فیزیکی را به دست آوریم. فرض اول این است که این سلول‌های کوچک، مسیر حرکتی خود را به کمک یک قدم زدن تصادفی انتخاب می‌کنند. فرض دوم هم اینکه با توجه به درکی که از چگالی ماده شیمیایی در اطراف خود دارند، مسیر حرکت خود را در راستای مناسب تغییر می‌دهند. معقول است که تصور کنیم که جریان حرکتی سلول‌ها در هر نقطه، متناسب با چگالی سلول‌ها در آن نقطه باشد، با فرض اینکه چگالی ماده شیمیایی تغییر نکند. بنابراین می‌توانیم توصیف زیر را برای بیان جریان حرکت سلول‌ها، j ، داشته باشیم،

$$j = -D\nabla n + nu_c,$$

که در این معادله جمله $D\nabla n$ بیان‌گر انتشار ذرات است و u_c به سرعت شیمیایی* مشهور است. کلر و سیگل[‡] در مقاله معروف‌شان [۲۷] پیشنهاد کرده‌اند که به عنوان سرعت شیمیایی از عبارت $\chi(n, S)\nabla S$

*Chemical Velocity

‡Keller & Segel

استفاده شود که در آن $\chi(n, S)$ به عنوان ضریب حساسیت شیمیایی* شناخته می‌شود. با یادآوری پیش‌زمینه زیستی مسأله که در مقدمه به آن اشاره شد، می‌توان دید که این فرض، یک فرض فیزیکی معقول و طبیعی است، چرا که در هر حال در عموم مسائل، حساسیت سلول‌ها نسبت به راستای افزایش چگالی ماده شیمیایی است، چه در مورد سلول‌های نسبتاً بزرگ که این راستا را مستقیماً درک و حس می‌کنند، و چه در مورد سلول‌های کوچک‌تر که با چند قدم تصادفی بسیار کوچک به نسبت محیط، افزایش یا کاهش چگالی ماده شیمیایی را اندازه‌گیری می‌کنند. بسته به اینکه ماده شیمیایی مورد نظر، غذای سلول یا سم باشد، ضریب حساسیت شیمیایی، مثبت یا منفی خواهد بود.

با فرض اینکه سلول‌ها (حداقل در ابعاد زمانی مورد نظر) مرگ و میر و تولید مثل ندارند، به معادله پایایی جرم زیر خواهیم رسید،

$$\partial_t n = \nabla \cdot (D \nabla n + n \chi(n, S) \nabla S). \quad (1.2)$$

برای رسیدن به یک دستگاه کامل از معادلات، لازم است که معادله‌ای برای تحول چگالی شیمیایی نیز نوشته شود. البته باید توجه داشت که ممکن است متغیرهای ناشناخته دیگری هم در مسأله وجود داشته باشند. در بعضی حالات، چگالی ماده شیمیایی، S ، از قسمت‌های دیگر مسأله در دست است و نیازی به معادله دیگر نیست.

در مسائل مورد نظر ما، ماده شیمیایی، سیگنالی برای جذب سلول‌ها به سمت یکدیگر است که توسط خود سلول‌ها تولید و در محیط منتشر می‌شود. در این حالت پاسخ سلول‌ها به این سیگنال، مثبت است و لذا $\chi > 0$. همچنین برای تحول چگالی ماده شیمیایی می‌توان معادله سهموی[#] زیر را در نظر گرفت،

$$\varepsilon \partial_t S = \Delta S - \alpha S + n, \quad (2.2)$$

که در آن α ضریب تنزل ماده شیمیایی است و ε نمایانگر تفاوت سرعت پخش شدن ماده شیمیایی در محیط به نسبت سلول‌هاست. با توجه به اینکه در غالب موارد، سرعت این انتشار به مراتب بزرگ‌تر از سرعت انتشار سلول‌هاست، می‌توان در حالت حدی فرض کرد که $\varepsilon = 0$ و به معادله بیضوی[†] زیر رسید،

$$-\Delta S + \alpha S = n. \quad (3.2)$$

با فرض اینکه ضریب تنزل α نیز برابر صفر باشد، معادله پواسون[‡] به دست می‌آید،

$$-\Delta S = n. \quad (4.2)$$

البته در اینجا توجه خواننده را به یک نکته جلب می‌کنیم. اگر مسأله را در یک ناحیه کران‌دار در نظر بگیریم، شرایط مرزی مطرح خواهد شد. تنها شرط مرزی مورد قبول برای معادله اصلی تحول چگالی سلول‌ها، شرط

*Chemical Sensitivity #Parabolic Equation †Elliptic Equation ‡Poisson Equation

جریان صفر روی مرز است تا جرم کل ثابت بماند،

$$\frac{\partial n}{\partial \eta} - \chi n \frac{\partial S}{\partial \eta} = 0,$$

که η بردار یکه عمود بر سطح روی مرز است. اما برای شرط مرزی تحول ماده شیمیایی، دو انتخاب طبیعی موجود است. یکی شرط مرزی دیریشله* یعنی،

$$S = 0,$$

روی مرز و دیگری شرط مرزی نیومن# یعنی،

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = 0,$$

روی مرز. اما اینجا باید توجه داشت که در حالتی که شرط مرزی نیومن در نظر گرفته می‌شود، به عنوان نمونه، معادله (۴.۲) را بایستی با

$$-\Delta S = n - \langle n \rangle,$$

تعویض کرد.

در اینجا به بیان تلاش‌های انجام شده برای تحلیل این معادلات می‌پردازیم. در مراجع [۱۵، ۲۴، ۲۵، ۳۲] می‌توان دستگاه

$$\begin{aligned} \partial_t n &= \nabla \cdot (D \nabla n + n \chi(n, S) \nabla S), \\ \varepsilon \partial_t S &= \Delta S - \alpha S + n, \end{aligned}$$

را دنبال نمود. همچنین مراجع [۱۰، ۱۶] به بررسی این مدل بر پایه معادله (۳.۲) (یعنی حالت $\varepsilon = 0$) پرداخته‌اند. خواننده علاقه‌مند به معادله (۴.۲) (یعنی $\varepsilon = \alpha = 0$) را به [۴، ۹، ۱۷، ۲۶، ۲۹] ارجاع می‌دهیم. در مرجع [۱۶]، یک مدل «رو به تباهی»[†] برای محرک شیمیایی مطالعه شده است که معادله حاکم بر چگالی این ماده شیمیایی به صورت زیر است،

$$\partial_t S = -S^m n, \quad m \geq 1.$$

این دستگاه معادلات به عنوان نمونه در رشد تومورها می‌تواند به کار آید. در [۱۱] یک دستگاه معادلات دیگر مطالعه شده است که در آن فرض بر این است که یک متغیر سوم نیز در کار است و آن چگالی یک ماده

*Dirichlet Boundary Condition

#Neumann Boundary Condition

†Degenerate

شیمیایی است که سلولها برای ترشح و تولید سیگنال شیمیایی، از محیط مصرف می کنند. این دستگاه معادلات به صورت زیر نوشته می شود،

$$\begin{aligned}\partial_t n &= \Delta n - \chi \nabla \cdot (n \nabla S), \\ -\Delta S &= n f - \langle n f \rangle, \\ \partial_t f &= -n f.\end{aligned}$$

در ادامه به همان دستگاه معادلات حاصل از معادله پواسون برای چگالی ماده شیمیایی خواهیم پرداخت. ترکیب (۱.۲) و (۴.۲) به یک دستگاه کامل از معادلات دیفرانسیل منجر می شود. در حالت ساده، فرض می کنیم که محیط یکنواخت است و ماتریس انتشار D همانی است. همچنین فرض می کنیم ضریب حساسیت شیمیایی یک ضریب ثابت باشد. با انجام این ساده سازی ها به دستگاه معادله سهموی-بیضوی زیر خواهیم رسید،

$$\begin{aligned}\partial_t n &= \Delta n - \chi \nabla \cdot (n \nabla S), \\ -\Delta S &= n.\end{aligned}\tag{۵.۲}$$

دقت کنید که با توجه به اینکه مشتق زمانی چگالی ذرات، فرم دیورژانسی دارد، جرم کل یعنی،

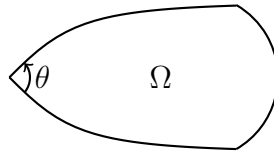
$$M = \int n,\tag{۶.۲}$$

(بدون توجه به فرضیات ضروری برای انتگرال پذیری) در طول زمان ثابت می ماند. رفتار مدل (۵.۲) نسبت به بُعد فضا، شدیداً تغییر می کند. در بُعد ۱، همیشه یک جواب سراسری در زمان وجود دارد [۲۰، ۲۱]. در بُعد بالاتر از ۲، لزوماً جواب سراسری وجود ندارد و شرطهای نسبتاً پیچیده ای برای وجود جواب سراسری نیاز است [۱۶]. از طرف دیگر برای هر جرم اولیه، ممکن است که دستگاه معادلات، جواب سراسری نداشته باشد. در بُعد ۲، معادلات کاملاً خوش رفتارند، به این معنی که یک جرم بحرانی وجود دارد: اگر جرم اولیه ذرات از این جرم بحرانی کمتر باشد، جواب سراسری برای معادلات خواهیم داشت، و اگر جرم اولیه ذرات از این جرم بحرانی بیشتر باشد، جواب در زمان متناهی به انفجار می رسد. معنی انفجار جواب هم این است که ذرات در چند نقطه، متمرکز و جمع می شوند [۴].

این مفهوم از انفجار جواب، بررسی این معادلات را جالب توجه می کند. در واقع در این سیستمها بیش از اینکه مسأله وجود جواب سراسری مطرح باشد، سؤال این است که آیا شرایطی می توان تصور کرد که در آن، جوابها به انفجار برسند؟ در واقع آزمایشها و پدیدههای مشاهده شده، عموماً این گونه هستند که در شرایطی، عملاً این تجمع اتفاق می افتد و در واقع جاذبه بین سلولها بر تمایل آنها به پخش شدن غلبه می کند. به عنوان نمونه می توانید تشکیل یک توده از باکتریها یا مثلاً مورچهها را تصور کنید. در مسأله ترمیم زخم و سیستمهای ایمنی هم این پدیده اهمیت بالایی پیدا می کند: آیا سلولهای محافظ، در مکان مورد نظر جمع خواهند شد؟ همچنین این پدیده را می توان در تشکیل طرحهای رنگی پوست حیوانات و خزندگان و پرندگان هم مشاهده کرد.

بنابراین دستگاه معادلات (۵.۲)، عملاً برای بُعد ۱ کارایی لازم را ندارد. همچنین در ابعاد بالاتر از ۲ پیچیده است و این مسأله که در این معادلات، فضای L^1 فضای بحرانی مسأله نیست، بر پیچیدگی آن می‌افزاید. در واقع در بُعد d ، فضای مناسب، فضای $L^{d/2}$ خواهد بود [۱۶]. وقتی $d = 2$ است، رفتار معادلات به طرز زیبایی ساده می‌شود.

در اینجا توجه خواننده را به این نکته جلب می‌کنیم که اگر دستگاه معادلات (۵.۲) را در یک ناحیه کران‌دار در نظر بگیریم، مسأله کمی پیچیده‌تر می‌شود و اثرات مرزی هم نقش مهمی پیدا می‌کنند. در حالتی که در کل فضا باشیم و یا اینکه از شرط مرزی دیریشله برای چگالی ماده شیمیایی استفاده کنیم، شرایط یکی است و جرم بحرانی برابر $M_{\text{crit}} = 8\pi/\chi$ است. اگر از شرط مرزی نیومن استفاده کنیم و مرز ناحیه مورد نظر هموار باشد، به علت اثرات مرزی، این جرم بحرانی نصف خواهد شد، یعنی $M_{\text{crit}} = 4\pi/\chi$. در حالت کلی‌تر، اگر مرز ناحیه تکه تکه C^α باشد و کوچکترین زاویه بین بخش‌های هموار مرز، برابر θ باشد، در این صورت جرم بحرانی $M_{\text{crit}} = 4\theta/\chi$ خواهد بود.



اکنون این سؤال را می‌توان مطرح کرد که آیا این مدل قابلیت تغییر دارد، به گونه‌ای که در همه ابعاد، رفتار مناسب که در بُعد ۲ از خود نشان می‌دهد را داشته باشد. دقت کنید که در بُعد ۲، معادله مربوط به چگالی ماده شیمیایی، در واقع تبدیل به $S = K_2 * n$ می‌شود که $K_2(z) = \frac{1}{\pi} \log |z|$ جواب بنیادی* معادله پواسون است. نظر بر این است که بحرانی بودن بُعد ۲، در واقع به خاطر بحرانی بودن این هسته است.

۲-۲ معرفی مدل تصحیح‌شده

در اینجا قانون دیگری را برای پخش ماده شیمیایی معرفی می‌کنیم که خواصی دارد که دیگر وابسته به بُعد فضا نیست. برای این منظور نسخه تصحیح‌شده‌ای از مدل کلر-سیگل را روی یک دامنه $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ در نظر می‌گیریم و برای سادگی فرض می‌کنیم که این دامنه، یک دامنه کران‌دار منظم است و یا کل فضا،

$$\begin{cases} \partial_t n = \Delta n - \chi \nabla \cdot (n \nabla S), & t > 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\ S = K * n, & t > 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\ \frac{\partial n}{\partial \eta} - \chi n \frac{\partial S}{\partial \eta} = 0, & t > 0, x \in \partial \Omega, \\ n(t=0) = n_0 \geq 0, & \end{cases} \quad (7.2)$$

*Fundamental Solution

که در این معادلات، η نشان‌دهنده بردار یکه برون‌گرای عمود بر سطح روی مرز دامنه است در حالی که دامنه کران‌دار باشد. هسته بحرانی K و جرم بحرانی M_{crit} به صورت زیر تعریف می‌شوند،

$$K(z) = -\frac{1}{d\pi} \log |z|, \quad M_{\text{crit}} = \frac{2d^\alpha \pi}{\chi}. \quad (۸.۲)$$

این ایده در بُعد ۱، یک نقطه نظر جدید را هم وارد می‌کند که در واقع مفهوم حرکت براونی کسری* یا پخش کسری# است، به این معنی که به کمک تعریف ۱.۱ در واقع داریم،

$$(-\Delta)^{\frac{1}{2}} S = n.$$

در ادامه، به تحلیل این مدل در کل فضای اقلیدسی می‌پردازیم و سپس آن را در یک دامنه کران‌دار بررسی خواهیم کرد.

۲-۳ کاربردها در علوم دیگر

واقعیت این است که مدل‌های اینچنین در علوم دیگر نیز کاربردهای خوبی دارند. به طور کلی در حالت‌هایی که با ذراتی رو به رو هستیم که بین آنها جاذبه‌ای وجود دارد و این جاذبه بر حرکت آنها تأثیر می‌گذارد، چنین مدل‌سازی‌هایی قابل انجام است. به عنوان مثال، دقیقاً همین مدل در علوم کیهان‌شناسی کاربرد دارد [۳]. در این حالت، n چگالی ذرات است، اما دیگر ماده شیمیایی برای جذب در کار نیست. به جای آن، نیروی جاذبه بین ذرات است که در واقع S نمایش‌گر پتانسیل نیروی جاذبه خواهد بود و ∇S نیروی گرانش است. این مدل‌سازی در توصیف پدیده‌هایی مانند تشکیل سیاه‌چاله‌ها به کار خواهد آمد. به نظر می‌رسد که بتوان از این ایده‌ها برای توصیف پدیده‌های اجتماعی نیز استفاده کرد.

*Fractional Brownian Motion

#Fractional Diffusion

۳ تحلیل مدل در کل فضای اقلیدسی

در این فصل، به تحلیل مدل تصحیح شده کور-سیگل که در قسمت قبلی معرفی شد، روی کل فضای اقلیدسی d -بعدی خواهیم پرداخت. ابتدا یک تابعک لیاپانوف برای این دستگاه معادلات معرفی می‌کنیم و یک مفهوم از جواب ضعیف ارائه می‌کنیم و به کمک این مفهوم، نشان می‌دهیم که این دستگاه معادلات برای پایین جرم بحرانی، جواب سراسری دارد و برای بالای جرم بحرانی، جواب در زمان متناهی به انفجار می‌رسد. سپس به حالات ایستای این مدل اشاره می‌کنیم و در انتها نشان می‌دهیم که تخمین نرم L^p جواب، چگونه در زمان منتشر می‌شود.

۳-۱ تحول سیستم

در اینجا قضیه کاملی برای وجود و انفجار جواب دستگاه معادلات مورد نظر بیان خواهیم کرد که در ادامه، به اثبات آن می‌رسیم.

اثبات وجود جواب برای دستگاه معادلات (۷.۲) شامل چندین مرحله است. به صورت کلی می‌توان این گونه بیان کرد که دو مرحله اصلی وجود دارد که یکی منظم کردن* معادلات است که در این مرحله به کمک بُرش# هسته‌ها و توابع مورد نظر، خود را به فضای توابع کران دار محدود خواهیم کرد و سپس از خواص فشردگی برای رفتن به حد استفاده می‌کنیم و مرحله دیگر هم جدا کردن معادلات از یکدیگر است تا بتوان به کمک قضایای نقطه ثابت† مناسب، دستگاه مورد نظر را حل کرد. فرآیند اثبات طولانی است و جزئیات تکنیکی زیادی دارد، ولی سعی می‌کنیم روند اثبات را به گونه‌ای پیش ببریم که از پیچیدگی‌ها کم کند. در ابتدا دقت کنید که با توجه به اینکه معادله حاکم بر n یک معادله سهموی است، بنابراین خاصیت «اصل بیشینگی»‡ برقرار است و نتیجه می‌گیریم که با توجه به نامنفی بودن چگالی‌ها در لحظه اولیه، تا وقتی که دستگاه (۷.۲) جواب دارد، این جواب، نامنفی است.

قبل از اینکه با دقت پیش برویم، اجازه دهید که به صورت نادقیق، محاسباتی را انجام دهیم که اثبات وجود و انفجار جواب، بر پایه آنها قرار می‌گیرد. ابتدا بایستی اشاره کنیم که در این حالت یک تابعک لیاپانوف^b به

*Regularize Functional #Truncation †Fixed Point Theorems ‡Maximal Principle ^bLyapunov

دستگاه معادلات (۷.۲) نسبت داده می‌شود [۲۲، ۳]،

$$\Psi(n) = \int_{\mathbb{R}^d} n \log n - \frac{\chi}{2} \int_{\mathbb{R}^d} n S = \int_{\mathbb{R}^d} n \log n - \frac{\chi}{2} \int_{\mathbb{R}^d} n K * n. \quad (۱.۳)$$

در واقع انرژی نسبت داده شده به این سیستم، ترکیبی از آنتروپی سیستم (به علت تمایل سلول‌ها به پخش شدن در محیط) و پتانسیل ناشی از ماده شیمیایی است؛ ذرات تمایل دارند در جایی که چگالی شیمیایی بیشتر است تجمع کنند. این انرژی در امتداد جواب‌های معادله، نزولی خواهد بود، یعنی اگر n جوابی از معادله دیفرانسیل باشد، تابع $t \mapsto \Psi(n(t, \cdot))$ نزولی است،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi(n(t, \cdot)) &= \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbb{1} + \log n) \partial_t n - \chi \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t n K * n \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbb{1} + \log n - \chi K * n) \partial_t n \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbb{1} + \log n - \chi S) \nabla \cdot (\nabla n - \chi n \nabla S) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} \nabla (\mathbb{1} + \log n - \chi S) \cdot (\nabla n - \chi n \nabla S) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla \log n - \chi \nabla S) \cdot (\nabla n - \chi n \nabla S), \end{aligned}$$

و لذا داریم،

$$\frac{d}{dt} \Psi(n(t, \cdot)) = - \int_{\mathbb{R}^d} n |\nabla \log n - \chi \nabla S|^2 \leq 0. \quad (۲.۳)$$

از نابرابری لگاریتمی هاردی-لیتلوود-سوبولف یعنی قضیه ۴.۱، نتیجه می‌شود که این تابع، برای مقادیر کوچک جرم، از پایین کران دار است،

$$\begin{aligned} \Psi(n) &= \int_{\mathbb{R}^d} n \log n + \frac{\chi}{2d\pi} \int_{\mathbb{R}^d} n \log *n \\ &\geq \left(1 - \frac{\chi M}{2d\pi}\right) \int_{\mathbb{R}^d} n \log n + C \\ &= \left(1 - \frac{M}{M_{\text{crit}}}\right) \int_{\mathbb{R}^d} n \log n + C. \end{aligned}$$

با استفاده از این کران، اگر $M < M_{\text{crit}}$ باشد، با توجه به نزولی بودن $\Psi(n)$ در طول زمان، یک کران بالا برای $\int_{\mathbb{R}^d} n \log n$ به دست می‌آید. چون نگاشت $x \mapsto x \log x$ محدب و با رشد بیش از خطی است، لذا چگالی ذرات، یعنی n ، نسبت به زمان، هم-انتگرال پذیر* خواهد بود و این یک نکته کلیدی برای بحث وجود جواب سراسری دستگاه (۷.۲) است. این موضوع را در ادامه به صورت کامل‌تر خواهیم دید.

*Equi-integrable

یکی دیگر از کمیت‌های اساسی در این گونه مسائل، گشتاور دوم* چگالی ذرات است،

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} |x|^2 n(t, x) dx. \quad (3.3)$$

به عنوان نمونه به [۳۱] مراجعه کنید. مشتق زمانی این کمیت را هم بدون توجه به وجود انتگرال‌ها در حالت $d \geq 2$ چنین محاسبه می‌کنیم،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} |x|^2 \partial_t n dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} |x|^2 \nabla \cdot (\nabla n - \chi n \nabla S) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} x \cdot (\nabla n - \chi n \nabla S) dx. \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\nabla S = \frac{1}{d\pi} \frac{x}{|x|^2} * n$ است، خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I &= \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla \cdot x) n dx - \frac{\chi}{d\pi} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} n(t, x) \frac{x \cdot (x - y)}{|x - y|^2} n(t, y) dy dx \\ &= dM - \frac{\chi}{2d\pi} M^2 \\ &= dM \left(1 - \frac{M}{M_{\text{crit}}} \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

برای حالت $d = 1$ ، محاسبه کمی متفاوت است، اما نتیجه همین خواهد بود. در این حالت داریم $\nabla S = \mathbb{H}n -$ بنا بر این،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I &= M - \frac{\chi}{\pi} \int_{\mathbb{R}} n(t, x) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x - y} n(t, y) \mathbf{1}_{\{|x-y|>\varepsilon\}} dy dx \\ &= M - \frac{\chi}{\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} n(t, x) n(t, y) \mathbf{1}_{\{|x-y|>\varepsilon\}} dx dy \\ &= M \left(1 - \frac{M}{M_{\text{crit}}} \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

اگر $M > M_{\text{crit}}$ ، منفی بودن این مشتق زمانی نشان می‌دهد که یک تکینگی به وجود خواهد آمد که مانع از این است که این محاسبات به صورت سراسری درست باشد زیرا بایستی $I > 0$ باقی بماند. بعد از معرفی این دو کمیت مهم، دوباره به دقت ریاضی معمول و اثبات دقیق قضیه وجود جواب باز می‌گردیم.

قضیه ۱.۳ (جرم بحرانی برای هسته لگاریتمی در کل فضا). فرض کنید $\Omega = \mathbb{R}^d$ است و همچنین داشته باشیم $n_0 |\log n_0| \in L^1$ و $n_0 (1 + |x|^2) \in L^1$ اگر $M > M_{\text{crit}}$ ، آنگاه جواب معادلات (۷.۲) در زمان متناهی

*Second Momentum

به انفجار می‌رسد. اگر $M < M_{\text{crit}}$ ، آنگاه دستگاه معادلات (۷.۲) جواب سراسری ضعیف دارد و تخمین نرم L^p نیز در زمان باقی می‌ماند. اگر به علاوه برای یک $p > d > 1$ داشته باشیم $n_0 \in L^p$ ، آنگاه برای هر $T > \alpha > 0$ خواهیم داشت $n(\cdot, \cdot) \in L^\infty((\alpha, T) \times \mathbb{R}^d)$.

۳-۲ وجود جواب سراسری برای پایین جرم بحرانی

در این بخش به اثبات قسمت وجود جواب سراسری در قضیه ۱.۳ خواهیم پرداخت. اثبات را به چندین قسمت مستقل تفکیک می‌کنیم و از ساده‌ترین قسمت شروع می‌کنیم که جداسازی معادلات است. در واقع معادله مربوط به چگالی ذرات را حل می‌کنیم، با این فرض که چگالی ماده شیمیایی مشخص باشد.

لم ۲.۳. فرض کنید $\mathbf{F} \in L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^d)$. اگر $n_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ باشد، در این صورت معادله

$$\partial_t n = \nabla \cdot (\nabla n - n\mathbf{F}), \quad (۶.۳)$$

یک جواب ضعیف یکتا با شرط اولیه n_0 در فضای $L^1(0, T; H^1(\mathbb{R}^d)) \cap C((0, T); L^1(\mathbb{R}^d))$ دارد.

اثبات. همانطور که از نظریه نیم-گروه‌ها* می‌دانیم، جواب معادله $\partial_t n - \Delta n = b(t, x)$ ، به صورت زیر خواهد بود،

$$n(t, \cdot) = G(t, \cdot) * n_0 + \int_0^t G(t-s, \cdot) * b(s, \cdot) ds.$$

بنابراین برای اثبات وجود جواب ضعیف با استفاده از یک روش نقطه ثابت، نگاشت \mathcal{T} را روی فضای $C([0, \tau]; L^1(\mathbb{R}^d))$ با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم،

$$\mathcal{T}n(t, \cdot) = G(t, \cdot) * n_0 + \int_0^t \nabla G(t-s, \cdot) * (n(s, \cdot)\mathbf{F}(s, \cdot)) ds.$$

برای مقادیر کوچک τ ، این نگاشت، یک انقباض است،

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}n_1(t) - \mathcal{T}n_2(t)\|_1 &\leq \int_0^t \|\nabla G(t-s) * (n_1(s)\mathbf{F}(s) - n_2(s)\mathbf{F}(s))\|_1 ds \\ &\leq \int_0^t \|\nabla G(t-s)\|_1 \|n_1(s)\mathbf{F}(s) - n_2(s)\mathbf{F}(s)\|_1 ds \\ &\leq \int_0^t C(t-s)^{-1/\gamma} \|\mathbf{F}\|_\infty \|n_1 - n_2\|_{C([0, \tau]; L^1)} ds \\ &\lesssim \sqrt{t} \|n_1 - n_2\|_{C([0, \tau]; L^1)}, \end{aligned}$$

*Semi-group Theory

که نتیجه می دهد،

$$\|\mathcal{T}n_1 - \mathcal{T}n_2\|_{C([\cdot, \tau]; L^1)} \lesssim \sqrt{\tau} \|n_1 - n_2\|_{C([\cdot, \tau]; L^1)}.$$

پس نگاشت \mathcal{T} ، نقطه ثابت منحصر به فردی دارد که آن را n می نامیم،

$$n(t, \cdot) = G(t, \cdot) * n_0 + \int_0^t \nabla G(t-s, \cdot) * (n(s, \cdot) \mathbf{F}(s, \cdot)) ds.$$

با توجه به اینکه $n(\tau, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ، با تکرار این روند و شروع از زمان τ می توان این جواب را ادامه داد تا به طولانی ترین جواب ممکن رسید که تا همان زمان T خواهد بود. \square

اکنون با آزمون (۶.۳) به وسیله n خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|n\|_2^2 &= -\|\nabla n\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^d} n \mathbf{F} \cdot \nabla n \leq -\|\nabla n\|_2^2 + \|\nabla n\|_2 \|n \mathbf{F}\|_2 \\ &\leq \frac{1}{4} \|n \mathbf{F}\|_2^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \|\mathbf{F}\|_\infty^2 \|n\|_2^2, \end{aligned}$$

و لذا خواهیم داشت،

$$\|n\|_{C((\cdot, T); L^1)} \leq \|n_0\|_2 \exp(\|\mathbf{F}\|_\infty^2 T/4).$$

اکنون اگر n_1 و n_2 به ترتیب جواب های متناظر \mathbf{F}_1 و \mathbf{F}_2 باشند، در این صورت با آزمون تفاضل دو معادله به وسیله $n_1 - n_2$ به دست می آوریم،

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|n_1 - n_2\|_2^2 \leq \frac{1}{4} \|n_1 \mathbf{F}_1 - n_2 \mathbf{F}_2\|_2^2 = \frac{1}{16} \|(n_1 - n_2)(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) + (n_1 + n_2)(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2)\|_2^2,$$

که نتیجه می دهد،

$$\frac{d}{dt} \|n_1 - n_2\|_2^2 \leq \frac{1}{4} (\|n_1 - n_2\|_2^2 \|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2\|_\infty^2 + \|\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2\|_\infty^2 \|n_1 + n_2\|_2^2).$$

با توجه به اینکه $\|n_1 - n_2\|_2$ در لحظه ابتدایی، برابر صفر است، خواهیم داشت،

$$\|n_1 - n_2\|_{C((\cdot, T); L^1)} \leq \|\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2\|_\infty \|n_1 + n_2\|_{C((\cdot, T); L^1)} \frac{(\exp(\|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2\|_\infty^2 T/4) - 1)^{\frac{1}{2}}}{\|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2\|_\infty}.$$

در نهایت نتیجه می گیریم،

$$\|n_1 - n_2\|_{C((\cdot, T); L^1)} \leq C(T, \|n_0\|_2, \|\mathbf{F}_1\|_\infty, \|\mathbf{F}_2\|_\infty) \sqrt{T} \|\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2\|_\infty, \quad (7.3)$$

که نشان می دهد جواب معادله (۶.۳) نسبت به \mathbf{F} پیوسته است.

در قدم بعدی، وجود جواب معادله را به دست می آوریم، در حالتی که هسته مورد نظر را بُرش زده باشیم.

لم ۳.۳. اگر $n_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ باشد، در این صورت برای هر $\varepsilon > 0$ ، معادله

$$\partial_t n = \nabla \cdot (\nabla n - \chi n \nabla K_\varepsilon * n), \quad (۸.۳)$$

جواب ضعیف یکتا در فضای $(L^1(\mathbb{R}^+; H^1(\mathbb{R}^d)))$ دارد که،

$$K_\varepsilon(x) = -\frac{1}{d\pi} \times \begin{cases} \log \varepsilon^{-1}, & |x| > \varepsilon^{-1}, \\ \log |x|, & \varepsilon \leq |x| \leq \varepsilon^{-1}, \\ \log \varepsilon, & |x| < \varepsilon. \end{cases}$$

اثبات. جواب معادله (۶.۳) را به \mathcal{TF} نمایش دهید. پس هدف، حل مسأله نقطه ثابت

$$n = \mathcal{T}(\chi \nabla K_\varepsilon * n),$$

خواهد بود. با توجه به تخمین (۷.۳) و همچنین نابرابری $\|g\|_2 \leq \|\nabla K_\varepsilon\|_2 \|g\|_2$ ، برای مقادیر کوچک T ، نگاشت مورد نظر انقباض است و لذا نقطه ثابت یکتا دارد. با توجه به اینکه $n(T, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ است، جواب را تا هر زمان دلخواه می‌توان ادامه داد. \square

لم ۴.۳. فرض کنید $(1 + |x|^2 + |\log n_0|)n_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ و $M < M_{\text{crit}}$ باشد. در این صورت اگر n_ε جواب ضعیف معادله

$$\partial_t n_\varepsilon = \nabla \cdot (\nabla n_\varepsilon - \chi n_\varepsilon \nabla K_\varepsilon * n_\varepsilon),$$

با شرط اولیه $n_{\varepsilon 0} = \min\{n_0, \varepsilon^{-1}\}$ در بازه $(0, T)$ باشد و $S_\varepsilon = K_\varepsilon * n_\varepsilon$ عبارات زیر به طور یکنواخت نسبت به ε کران دار هستند،

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 n_\varepsilon, \quad \int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon |\log n_\varepsilon|, \quad \int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon S_\varepsilon, \\ & \|\nabla \sqrt{n_\varepsilon}\|_{L^1(0, T; L^1)}, \quad \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \nabla n_\varepsilon \cdot \nabla S_\varepsilon, \quad \|\sqrt{n_\varepsilon} \nabla S_\varepsilon\|_{L^1(0, T; L^1)}, \\ & \|n_\varepsilon \nabla S_\varepsilon\|_{L^1(0, T; L^1)}. \end{aligned}$$

اثبات. با آزمون معادله به وسیله تابع $|x|^2$ به دست می‌آوریم،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} |x|^2 n_\varepsilon(t, x) dx &= dM + \frac{\chi}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon(t, x) (x - y) \cdot \nabla K_\varepsilon(x - y) n_\varepsilon(t, y) dx dy \\ &\leq dM, \end{aligned}$$

زیرا $(x - y) \cdot \nabla K_\varepsilon(x - y) \leq 0$. لذا کران بالای $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 n_\varepsilon$ نسبت به ε یکنواخت است. محاسبه‌ای دقیقاً مشابه (۲.۳) نشان می‌دهد،

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon \log n_\varepsilon - \frac{\chi}{2} \int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon S_\varepsilon \right) = - \int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon |\nabla \log n_\varepsilon - \nabla S_\varepsilon|^2 \leq 0.$$

پس باز هم عبارت $\int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon \log n_\varepsilon - \frac{1}{\nu} \chi \int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon S_\varepsilon$ ، کران بالایی دارد که وابسته به ε نیست. همچنین،

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon S_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon(x) K_\varepsilon(x-y) n_\varepsilon(y) dx dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon(x) K(x-y) n_\varepsilon(y) dx dy + \iint_{|x-y| > \varepsilon^{-1}} n_\varepsilon(x) (|x|^\nu + |y|^\nu) n_\varepsilon(y) dx dy \\ &\leq C + \frac{M}{d^\nu \pi} \int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon \log n_\varepsilon + 2M \int_{\mathbb{R}^d} |x|^\nu n_\varepsilon, \end{aligned}$$

که مرحله آخر از نابرابری لگاریتمی هاردی-لایتلود-سوبولف نتیجه شده است. پس با توجه به اینکه $M < M_{\text{crit}}$ است، ثابت کرده‌ایم که عبارت $\int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon \log n_\varepsilon$ هم کران بالایی یکنواخت بر حسب ε دارد. بنابراین از نامساوی بالا، کران یکنواخت برای $\int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon S_\varepsilon$ هم به دست می‌آید. اکنون قرار می‌دهیم $\tilde{n}_\varepsilon = n_\varepsilon \mathbf{1}_{\{n_\varepsilon < 1\}}$ و از نابرابری زیر استفاده می‌کنیم،

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{n}_\varepsilon \log \tilde{n}_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{n}_\varepsilon \log \left(\frac{\tilde{n}_\varepsilon}{e^{-|x|^\nu}} \right) dx - \int_{\mathbb{R}^d} |x|^\nu \tilde{n}_\varepsilon dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\tilde{n}_\varepsilon}{e^{-|x|^\nu}} \log \left(\frac{\tilde{n}_\varepsilon}{e^{-|x|^\nu}} \right) e^{-|x|^\nu} dx - \int_{\mathbb{R}^d} |x|^\nu \tilde{n}_\varepsilon dx \\ &\geq -e^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^\nu} dx - \int_{\mathbb{R}^d} |x|^\nu n_\varepsilon dx, \end{aligned}$$

که مرحله آخر با توجه به این نکته به دست می‌آید که $\min_{x \geq 0} x \log x = -e^{-1}$. پس $\int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon [\log n_\varepsilon]_-$ هم کران بالایی یکنواخت بر حسب ε نیز دارد که در مجموع نتیجه می‌دهد $\int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon |\log n_\varepsilon|$ نسبت به ε کران یکنواخت دارد. اکنون محاسبات زیر را انجام می‌دهیم،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon \log n_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \log n_\varepsilon) \partial_t n_\varepsilon \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \log n_\varepsilon \cdot (\nabla n_\varepsilon - \chi n_\varepsilon \nabla S_\varepsilon) \\ &= -\nu \|\nabla \sqrt{n_\varepsilon}\|_\nu^2 + \chi \int_{\mathbb{R}^d} \nabla n_\varepsilon \cdot \nabla S_\varepsilon. \end{aligned}$$

اگر $d > 1$ باشد، از نابرابری هاردی-لایتلود-سوبولف خواهیم داشت،

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon \log n_\varepsilon \leq -\nu \|\nabla \sqrt{n_\varepsilon}\|_\nu^2 + C\chi \|\nabla n_\varepsilon\|_p \|n_\varepsilon\|_p,$$

که در آن $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{\nu d}$ ، یا به تعبیر دیگر $p = (\nu d)'$. اگر هم $d = 1$ باشد، باز هم این نابرابری صحیح است زیرا،

$$\|\nabla S_\varepsilon\|_\nu = \|\mathcal{F} \nabla S_\varepsilon\|_\nu \leq \|\mathcal{F} \nabla K_\varepsilon\|_\infty \|\mathcal{F} n_\varepsilon\|_\nu = \|\mathcal{F} \nabla K_\varepsilon\|_\infty \|n_\varepsilon\|_\nu,$$

و از طرفی،

$$\mathcal{F}\nabla K_\varepsilon(\xi) = \int_{\varepsilon < |x| < \varepsilon^{-1}} e^{2\pi i \xi x} \frac{1}{\pi x} dx = 2 \int_{\xi^{-1}\varepsilon < x < \xi^{-1}\varepsilon^{-1}} \frac{\sin 2\pi x}{\pi x} dx,$$

که با توجه به این تساوی به سادگی دیده می‌شود که $\mathcal{F}\nabla K_\varepsilon(\xi)$ کران یکنواختی بر حسب ε و ξ دارد. از طرف دیگر از نابرابری هولدر داریم،

$$\|\nabla n_\varepsilon\|_p = 2 \|\sqrt{n_\varepsilon} \nabla \sqrt{n_\varepsilon}\|_p \leq 2 \|\sqrt{n_\varepsilon}\|_{2d'} \|\nabla \sqrt{n_\varepsilon}\|_2 = 2 \|n_\varepsilon\|_{d'}^{1/2} \|\nabla \sqrt{n_\varepsilon}\|_2.$$

همچنین از درون‌یابی داریم،

$$\|n_\varepsilon\|_p \leq \|n_\varepsilon\|_1^{1/2} \|n_\varepsilon\|_{d'}^{1/2} \leq CM^{1/2} \|n_\varepsilon\|_{d'}^{1/2}.$$

نتیجه می‌گیریم،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon \log n_\varepsilon &\leq -4 \|\nabla \sqrt{n_\varepsilon}\|_2^2 + 2C\chi M^{1/2} \|n_\varepsilon\|_{d'} \|\nabla \sqrt{n_\varepsilon}\|_2 \\ &\leq -3 \|\nabla \sqrt{n_\varepsilon}\|_2^2 + C^2 \chi^2 M \|n_\varepsilon\|_{d'}^2. \end{aligned}$$

در اینجا از نابرابری گالیاردو-نیرنبرگ-سوبولف استفاده می‌کنیم،

$$\|n_\varepsilon\|_{d'} \leq C \|\nabla n_\varepsilon\|_1 \leq C \|\sqrt{n_\varepsilon}\|_2 \|\nabla \sqrt{n_\varepsilon}\|_2 \leq CM^{1/2} \|\nabla \sqrt{n_\varepsilon}\|_2. \quad (9.3)$$

در مجموع نتیجه می‌گیریم،

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon \log n_\varepsilon \leq (-3 + C\chi^2 M) \|\nabla \sqrt{n_\varepsilon}\|_2^2.$$

اکنون اگر M به اندازه کافی کوچک باشد طوری که طرف راست عبارت بالا منفی باشد، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. اشکال کار این است که این روش، تمام محدوده دلخواه را پوشش نمی‌دهد و لذا کمی آن را تغییر می‌دهیم. در واقع برای یک A بزرگ، قرار دهید $\tilde{n}_\varepsilon = n_\varepsilon \mathbf{1}_{\{n_\varepsilon > A\}}$ خواهیم داشت،

$$\|\tilde{n}_\varepsilon\|_1 \leq \frac{1}{\log A} \|\tilde{n}_\varepsilon \log \tilde{n}_\varepsilon\|_1 \leq \frac{1}{\log A} \|n_\varepsilon \log n_\varepsilon\|_1 \leq \frac{C}{\log A}.$$

اکنون اگر در نابرابری (9.3)، n_ε را با \tilde{n}_ε جایگزین کنیم و همچنین با استفاده از،

$$\|n_\varepsilon - \tilde{n}_\varepsilon\|_{d'} \leq (A^{d'-1} M)^{1/d'} = A^{1/d} M^{1/d'},$$

نتیجه می‌گیریم،

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon \log n_\varepsilon \leq (-3 + \frac{C}{\log A}) \|\nabla \sqrt{n_\varepsilon}\|_2^2 + C(A, M).$$

پس اگر A را به اندازه کافی بزرگ انتخاب کنیم، ثابت کردیم که $\|\nabla\sqrt{n_\varepsilon}\|_{L^p(\cdot, T; L^q)}$ وابسته به ε نیست. اکنون،

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon S_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^d} S_\varepsilon \partial_t n_\varepsilon \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla n_\varepsilon - \chi n_\varepsilon \nabla S_\varepsilon) \cdot \nabla S_\varepsilon \\ &= \chi \int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon |\nabla S_\varepsilon|^2 - \int_{\mathbb{R}^d} \nabla n_\varepsilon \cdot \nabla S_\varepsilon. \end{aligned}$$

آخرین نتیجه هم مستقیماً از نابرابری کوشی-شوارتز به دست می‌آید،

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon |\nabla S_\varepsilon|^2 \right) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} n_\varepsilon \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla S_\varepsilon|^2 \right),$$

□

و اثبات کامل است.

اکنون با توجه به نابرابری گالیاردو-نیرنبرگ-سوبولف برای تابع $\sqrt{n_\varepsilon}$ ، نتیجه می‌گیریم که n_ε در فضای $L^p((\cdot, T) \times \mathbb{R}^d)$ کران‌دار است برای هر $1 \leq p \leq 1 + 2/d$ و لذا با گذر به یک زیر دنباله وقتی $\varepsilon \rightarrow 0$ ، نتیجه می‌گیریم که n_ε به طور ضعیف در این فضاها به سمت تابعی مثل n میل می‌کند. لذا به صورت خاص، این دنباله به معنی توزیع‌ها هم به n همگراست. اکنون اگر قرار دهیم $S = K * n$ ، آنگاه،

$$\nabla S_\varepsilon - \nabla S = \nabla K * (n_\varepsilon - n) + \nabla(K_\varepsilon - K) * n_\varepsilon.$$

این نشان می‌دهد که ∇S_ε تقریباً همه‌جای $(\cdot, T) \times \mathbb{R}^d$ به صورت نقطه‌ای به ∇S میل می‌کند و لذا داریم،

$$n_\varepsilon \nabla S_\varepsilon \rightarrow n \nabla S, \quad \text{به معنای توزیع‌ها.}$$

این، اثبات قسمت وجود جواب قضیه ۱.۳ را کامل می‌کند.

حالت ایستا. می‌توان به دنبال حالات ایستا بود که در واقع کمینه‌سازهای تابع انرژی Ψ هستند. در حالت جرم بحرانی یعنی $M = M_{\text{crit}}$ ، دقیقاً کمینه‌سازهای این تابع انرژی را می‌شناسیم [۷، ۱۳]. این کمینه‌سازها، تصاویر همدیس* تابع زیر هستند،

$$h(x) = |\mathbb{S}^d|^{-1} \left(\frac{2}{1 + |x|^2} \right)^d.$$

* Conformal Images

۳-۳ جواب ضعیف و انفجار

همانطور که پیش‌تر اشاره شد، تساوی‌های (۴.۳) و (۵.۳) نشان می‌دهد که اگر بالای جرم بحرانی باشیم، یک تکینگی در جواب معادلات در زمان متناهی به وجود می‌آید. می‌توانیم این تکینگی را تحلیل کنیم و نشان دهیم که n نمی‌تواند یک تابع انتگرال‌پذیر باقی بماند. ابتدا بایستی مفهوم جواب ضعیف این دستگاه معادلات [۳۶] را به گونه‌ای تعمیم دهیم که توابع L^1 را هم در بر بگیرد. برای این منظور از تعریف معمول جواب‌های توزیعی استفاده می‌کنیم، با این تفاوت که از تقارن موجود در جمله رانش* نیز استفاده خواهیم کرد. فرض کنید $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ یک تابع آزمون# باشد. با آزمون (۷.۲) به وسیله این تابع خواهیم داشت،

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) n(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \Delta \psi(x) n(t, x) dx - \frac{\chi}{d\pi} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \psi(x) \cdot \frac{x-y}{|x-y|^2} n(t, x) n(t, y) dx dy.$$

در این تساوی، با توجه به اینکه می‌خواهیم فقط $n \in L^1$ باشد، بایستی تکینگی $|x-y|^{-1}$ را از بین ببریم. برای این منظور کافی است با استفاده از تقارن به صورت زیر تعریف کنیم،

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) n(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \Delta \psi(x) n(t, x) dx - \frac{\chi}{2d\pi} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla \psi(x) - \nabla \psi(y)) \cdot \frac{x-y}{|x-y|^2} n(t, x) n(t, y) dx dy. \quad (10.3)$$

چون $(\nabla \psi(x) - \nabla \psi(y)) \cdot (x-y)/|x-y|^2$ کران‌دار است، این تعریف از جواب ضعیف، به طور کامل برای $n \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^d))$ معنادار است که البته در اینجا، مشتق زمانی هم به معنای ضعیف تعریف می‌شود.

در ادامه، می‌خواهیم ثابت کنیم که در این جواب ضعیف، جرم کل ثابت می‌ماند. تابع آزمون $\psi_R(x) = \psi(|x|/R)$ را انتخاب می‌کنیم که $\psi(r) = 1$ برای $r \leq 1/2$ ، و $\psi(r) = 0$ برای $r \geq 1$. آنگاه،

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \Delta \psi_R(x) n(t, x) dx \right| \lesssim \frac{1}{R^\nu} \int_{\mathbb{R}^d} n(t, x) dx \rightarrow 0,$$

و همچنین،

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla \psi_R(x) - \nabla \psi_R(y)) \cdot \frac{x-y}{|x-y|^2} n(t, x) n(t, y) dx dy \right| \lesssim \frac{1}{R^\nu} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} n(t, x) n(t, y) dx dy,$$

که باز هم به صفر میل می‌کند. پس با حد گرفتن وقتی $R \rightarrow \infty$ ، به کمک توابع آزمون نسبت به زمان خواهیم داشت،

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} n(t, x) dx = 0.$$

همچنین برای این مفهوم از جواب ضعیف، لم زیر را خواهیم داشت،

*Drift Term #Test Function

لم ۵.۳. یک جواب ضعیف از (۷.۲) به معنای (۱۰.۳) که در شرط $\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|^2) n_0(x) dx < \infty$ صدق کند، تا زمانی که چگالی، یک تابع در فضای $L^1(\mathbb{R}^d)$ باشد، در شرط زیر هم صدق خواهد کرد،

$$\frac{d}{dt} I = dM \left(1 - \frac{M}{M_{\text{crit}}} \right). \quad (11.3)$$

اثبات. برای اثبات این لم، توابع $\psi_R(|x|) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ را در نظر بگیرید که وقتی $R \rightarrow \infty$ ، به صورت صعودی به $|x|^2/2$ میل کنند. همانند اثبات مربوط به پایا بودن جرم خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x) n(t, x) dx = \\ \int_{\mathbb{R}^d} \Delta \psi_R(x) n(t, x) dx - \frac{\chi}{2d\pi} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(\nabla \psi_R(x) - \nabla \psi_R(y)) \cdot (x - y)}{|x - y|^2} n(t, x) n(t, y) dx dy. \end{aligned}$$

همانند قبل، $(\nabla \psi_R(x) - \nabla \psi_R(y)) \cdot (x - y) / |x - y|^2$ و $\Delta \psi_R$ کران دار هستند و لذا در تساوی بالا، عبارت سمت راست کران دار است. بنابراین $\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R n dx$ به طور یکنواخت کران دار است و لذا نتیجه می‌گیریم $\int_{\mathbb{R}^d} \psi_R n dx < \infty$. در نهایت وقتی $R \rightarrow \infty$ ، می‌توانیم در هر جمله به کمک قضیه همگرایی یکنوای لبگ* به حد برویم (تا زمانی که می‌دانیم که تمامی جملات تحت تسلط تابع انتگرال‌پذیر n هستند) و تساوی (۱۱.۳) را نتیجه بگیریم. \square

۳-۴ تخمین‌ها در فضای L^p

با توجه به هم-انتگرال‌پذیری به دست آمده و وجود جواب، کاری که به طور معمول باقی می‌ماند، اثبات ابقای تخمین نرم L^p در زمان است. این کار اولین بار به وسیله جاگر و لوک‌هاوس[#] [۲۶] انجام شده است و این دو به این نکته اشاره کرده‌اند که نابرابری «گالیاردو-نیرنبرگ-سوبولف»[†] نقش کلیدی در ارائه این تخمین‌ها دارد. برای به کار بردن روش استفاده‌شده توسط آنها روی (۷.۲)، بایستی بین حالات $d = 1$ و $d = 2$ و $d \geq 3$ تمایز قائل شویم. حالت $d = 2$ که همان مدل کلاسیک است و به طور کامل مطالعه شده

*Lebesgue Monotone Convergence

[#]Jäger & Luckhaus

[†]Gagliardo-Nirenberg-Sobolev(GNS)

است [۲، ۹، ۱۶، ۲۲، ۲۶]. در هر حال در اینجا به طور خلاصه، محاسبات را بیان می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} n^p &= \int_{\mathbb{R}^d} p n^{p-1} \partial_t n = \int_{\mathbb{R}^d} p n^{p-1} \nabla \cdot (\nabla n - \chi n \nabla S) \\ &= -p \int_{\mathbb{R}^d} \nabla(n^{p-1}) \cdot (\nabla n - \chi n \nabla S) \\ &= -p(p-1) \int_{\mathbb{R}^d} n^{p-2} \nabla n \cdot (\nabla n - \chi n \nabla S) \\ &= -p(p-1) \int_{\mathbb{R}^d} |n^{p/2-1} \nabla n|^2 + (p-1) \chi \int_{\mathbb{R}^d} \nabla n^p \cdot \nabla S \\ &= -\frac{p-1}{p} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla n^{p/2}|^2 - (p-1) \chi \int_{\mathbb{R}^d} n^p \Delta S, \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد،

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} n^p = -\frac{p-1}{p} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla n^{p/2}|^2 + (p-1) \chi \int_{\mathbb{R}^d} n^{p+1}.$$

در اینجا نمی‌توان از لم گرونوال استفاده کرد، اما نابرابری GNS [۲۱، ۳۳] ما را قادر می‌سازد که جملات سمت راست را با هم مقایسه کنیم. در واقع،

$$\int_{\mathbb{R}^d} n^{p+1} \leq C \|\nabla n^{p/2}\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}^d} n.$$

برای اتمام این محاسبات، به این نیاز است که جرم از حدی کمتر باشد که این حد هم به p وابسته است. برای رفع این مشکل، از تکنیک ارائه شده در [۲۶] استفاده می‌کنیم و به جای n قرار می‌دهیم $[n-k]_+$. در نهایت برای $p > 1$ به دست می‌آوریم،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} [n-k]_+^p &\leq \left(-\frac{p-1}{p} + C\chi(p-1) \int_{\mathbb{R}^d} [n-k]_+ \right) \|\nabla [n-k]_+^{p/2}\|_{L^2}^2 \\ &\quad + C(k, M) \int_{\mathbb{R}^d} [n-k]_+^p. \end{aligned} \tag{۱۲.۳}$$

این، اثبات را برای هر p کامل می‌کند زیرا جمله $\int [n-k]_+$ به طور یکنواخت کوچک خواهد بود اگر k به اندازه کافی بزرگ باشد،

$$\int_{\mathbb{R}^d} [n-k]_+ \leq \int_{\mathbb{R}^d} n \frac{\log n}{\log k} \mathbf{1}_{\{n \geq k\}} \leq \int_{\mathbb{R}^d} n \frac{|\log n|}{\log k} \leq \frac{C}{\log k}.$$

در ادامه، همین تکنیک را برای دو حالت دیگر به کار می‌بریم. اگر چه محاسبات پیچیده‌تر هستند، اما عملاً تفاوت چندانی با مدل کلاسیک وجود ندارد. برای $d \geq 3$ ، مشتق زمانی نرْم L^p به صورت زیر خواهد بود،

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} n^p = -\frac{p-1}{p} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla n^{p/2}|^2 + \chi(p-1) \int_{\mathbb{R}^d} n^p (-\Delta S).$$

اکنون جمله آخر را بررسی می‌کنیم،

$$\int_{\mathbb{R}^d} n^p(-\Delta S) = \int_{\mathbb{R}^d} n^p(-\Delta K * n).$$

به معنای توزیع‌ها خواهیم داشت، $-\Delta K(z) = \frac{1}{d\pi} \frac{d-\nu}{|z|^\nu}$ ، اینجا از نابرابری هاردی-لیتلوود-سوبولف به همراه درون‌یابی استفاده می‌کنیم،

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} n^p(-\Delta S) &= \frac{d-\nu}{d\pi} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} n^p(x) |x-y|^{-\nu} n(y) dx dy \\ &\lesssim \|n^p\|_q \|n\|_r \\ &\lesssim \|n^p\|_q \|n\|_{p+\nu/d}^\theta \|n\|_1^{1-\theta} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} n^{p+\nu/d} \right)^{\frac{1}{q} + \frac{\theta}{p+\nu/d}} \|n\|_1^{1-\theta}, \end{aligned}$$

که اعداد q, r, θ در شرط‌های زیر صدق می‌کنند،

$$pq = p + \frac{\nu}{d}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \nu - \frac{\nu}{d}, \quad 1 - \theta + \frac{\theta}{p + \nu/d} = \frac{1}{r}.$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $\theta = \nu/d$ و لذا خواهیم داشت،

$$\int_{\mathbb{R}^d} n^p(-\Delta S) \lesssim \|n\|_1^{1-\nu/d} \int_{\mathbb{R}^d} n^{p+\nu/d}.$$

در اینجا به جایی رسیده‌ایم که می‌توان از نابرابری

$$\int_{\mathbb{R}^d} n^{p+\nu/d} \leq C \|\nabla n^{p/\nu}\|_{\nu}^{\nu} \|n\|_{\nu}^{\nu/d}, \quad (13.3)$$

استفاده کرد. تمام این محاسبات را می‌توان با استفاده از $[n-k]_+$ به جای n بازنویسی کرد تا تخمین‌های مشابه (۱۲.۳) به دست آید.

برای حالت $d=1$ داریم $\nabla S = -\mathbb{H}n$. تبدیل هیلبرت برای هر $p > 1$ یک تبدیل قوی (p, p) است، یعنی برای هر $f \in L^p$ داریم $\|\mathbb{H}f\|_p \leq C_p \|f\|_p$. بنابراین مشابه قبل خواهیم داشت،

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} n^p = -\nu \frac{p-1}{p} \int_{\mathbb{R}} |\nabla n^{p/\nu}|^{\nu} + \chi(p-1) \int_{\mathbb{R}} \nabla n^p \cdot \nabla S.$$

و همچنین،

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} \int_{\mathbb{R}} \nabla n^p \cdot \nabla S &\leq \|\nabla n^{p/\nu}\|_{\nu} \|n^{p/\nu} \mathbb{H}n\|_{\nu} \\ &\leq \|\nabla n^{p/\nu}\|_{\nu} \|n^{p/\nu}\|_{\nu q} \|\mathbb{H}n\|_{\nu q'} \\ &\lesssim \|\nabla n^{p/\nu}\|_{\nu} \|n\|_{pq}^{p/\nu} \|n\|_{\nu q'} \\ &\lesssim \|\nabla n^{p/\nu}\|_{\nu} \left(\int_{\mathbb{R}} n^{p+\nu} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

که $pq = p + 2 = 2q'$ در اینجا باز نابرابری (۱۳.۳) به کار می‌آید و همچنین می‌توان n را با $[n - k]_+$ جایگزین کرد. ادامه کار کاملاً شبیه مدل کلاسیک خواهد بود.

۳-۵ کران در فضای L^∞

کران در فضای L^∞ به کمک هسته حرارت $G(t, x)$ * به دست می‌آید،

$$n(t, \cdot) = G(t, \cdot) * n_0 - \int_0^t \nabla G(t-s, \cdot) * (n \nabla S)(s, \cdot) ds.$$

با توجه به اینکه داریم $n \in L^\infty((0, T); L^p(\mathbb{R}^d))$ و $p > d \geq d'$ بنابراین $\nabla S = -\frac{1}{d\pi} \frac{x}{|x|^2} * n$ متعلق به فضای $L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^d)$ است. لذا خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} \|n(t, \cdot)\|_\infty &\leq Ct^{-d/2} \|n_0\|_1 + C \int_0^t \|\nabla G(t-s, \cdot) * n(s, \cdot)\|_\infty ds \\ &\leq CMt^{-d/2} + C \|n\|_{L^\infty((0, T); L^p(\mathbb{R}^d))} \int_0^t \|\nabla G(s, \cdot)\|_{p'} ds, \end{aligned}$$

و حکم نهایی قضیه ۱.۳ از آنجا نتیجه می‌شود که برای $p > d$ داریم $\|\nabla G(s, \cdot)\|_{p'} = Cs^{-\frac{1}{2}(1+\frac{d}{p})}$ و $\frac{1}{2}(1+\frac{d}{p}) < 1$

*Heat Kernel

۴ تحلیل مدل در یک دامنه کران دار

از اینجا به بعد، معادلات (۷.۲) را روی دامنه کران دار $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ در نظر خواهیم گرفت و به دنبال این هستیم که قضایای وجود و انفجار جواب را در این حالت نیز بیان و اثبات کنیم. برای پرهیز از پیچیدگی‌های تکنیکی، فرض می‌کنیم که ناحیه مورد نظر، مرزی هموار دارد.

قبل از هر چیز تذکر می‌دهیم که این مدل نسبت به Ω همسان است، یعنی در واقع تحت انبساط‌های فضا ناورداست. به عبارت دقیق‌تر، اگر $\lambda\Omega$ را به عنوان دامنه در نظر بگیریم و قرار دهیم $\tilde{n}(t, x) = \lambda^d n(t, \lambda x)$ آنگاه دوباره به معادلات مورد نظر روی Ω خواهیم رسید که متغیر زمان به نسبت λ^2 تغییر کرده است و جرم نیز ثابت می‌ماند.

برای تعریف S به وسیله یک عمل گر پیچشی، نیاز داریم که n را بیرون از دامنه Ω هم تعریف کنیم. در اینجا به مطالعه دو حالت کاملاً طبیعی می‌پردازیم. یکی اینکه n را در بیرون از دامنه، صفر تعریف کنیم و دیگری اینکه آن را به وسیله میانگین‌ش در این دامنه گسترش دهیم.

۴-۱ توسعه چگالی با صفر

در این بخش مدل تصحیح‌شده بر اساس توسعه چگالی با صفر را بررسی می‌کنیم. ابتدا تحول سیستم را تحلیل می‌کنیم و قضیه وجود و انفجار جواب را بیان می‌کنیم. خواهیم دید که این مدل، تفاوت چندانی با حالت کل فضا ندارد. سپس به اثبات وجود حالات ایستا برای این مدل می‌پردازیم.

تحول سیستم. همانطور که پیش‌تر هم اشاره شد، این حالت نظیر در نظر گرفتن شرط مرزی دیریشله برای S است و لذا تقریباً مانند حالت کل فضا رفتار می‌کند. با شروع از معادله اصلی، این دستگاه معادلات مجهز به تابعک لیاپانوف زیر خواهد بود،

$$\Psi(n) = \int_{\Omega} n \log n - \frac{\chi}{2} \int_{\Omega} n S, \quad S = K * n,$$

که همانند حالت کل فضا،

$$\frac{d}{dt} \Psi(n(t)) = - \int_{\Omega} n |\nabla \log n - \chi \nabla S|^2 \leq 0. \quad (1.4)$$

با توجه به اینکه تابع n را در بیرون از ناحیه Ω برابر صفر تعریف کرده‌ایم، تمامی محاسبات مربوط به وجود جواب سراسری، عیناً در این حالت نیز انجام می‌شود. تنها باید مراقب مرحله اول اثبات، یعنی لم ۲.۳ باشیم.

لم ۱.۴. فرض کنید $\mathbf{F} \in L^\infty((\cdot, T) \times \Omega)$. اگر $n_0 \in L^2(\Omega)$ باشد، در این صورت معادله

$$\partial_t n = \nabla \cdot (\nabla n - n\mathbf{F}), \quad (2.4)$$

به همراه شرط اولیه $n(\cdot, 0) = n_0$ و شرط مرزی $\frac{\partial n}{\partial \eta} - \chi n \mathbf{F} \cdot \eta = 0$ در فضای $L^2(\cdot, T; H^1(\mathbb{R}^d))$ جواب ضعیف یکتا دارد.

اثبات. برای اثبات وجود و یکتایی جواب ضعیف، به عنوان نمونه به [۱۹] مراجعه کنید. \square

انفجار جواب. دوباره، مشتق زمانی گشتاور دوم را محاسبه می‌کنیم،

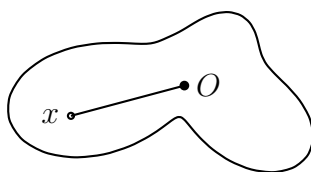
$$I(t) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |x|^2 n(x, t) dx. \quad (3.4)$$

همانند (۴.۳) و (۵.۳) داریم،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I &= - \int_{\Omega} x \cdot (\nabla n - \chi n \nabla S) dx \\ &= - \int_{\partial \Omega} (x \cdot \eta) n + \int_{\Omega} (\nabla \cdot x) n dx + \chi \int_{\Omega} x \cdot n \nabla S dx \\ &= - \int_{\partial \Omega} (x \cdot \eta) n + dM \left(1 - \frac{M}{M_{\text{crit}}} \right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

که η نمایش گر بردار یکه عمود بر سطح روی مرز است.

تعریف ۲.۴ (ناحیه ستاره‌ای شکل). ناحیه $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ را ستاره‌ای شکل* گوییم هرگاه نقطه $O \in \Omega$ وجود داشته باشد طوری که برای هر $x \in \Omega$ ، پاره‌خط واصل O و x کاملاً درون Ω قرار گیرد. نقطه O را «مرکز» این دامنه می‌نامیم.



با فرض ستاره‌ای شکل بودن دامنه Ω ، مرکز این دامنه را به عنوان مبدأ انتخاب می‌کنیم و این ما را مطمئن می‌کند که عبارت اول در (۴.۴) نامثبت است زیرا $x \cdot \eta$ همه‌جای مرز، نامنفی است. لذا باز هم در حالت $M > M_{\text{crit}}$ جواب در زمان متناهی به انفجار می‌رسد. این مطالب را در قضیه زیر جمع‌بندی می‌کنیم.

*Star-like

قضیه ۳.۴ (جرم بحرانی در حالت توسعه چگالی با صفر). فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ یک دامنه کران دار باشد و $n_0 \log n_0 \in L^1(\Omega)$. اگر $M < M_{\text{crit}}$ ، آنگاه دستگاه معادلات (۷.۲) جواب ضعیف سراسری دارد. برعکس در حالتی که دامنه Ω ستاره‌ای شکل باشد و $M > M_{\text{crit}}$ ، آنگاه جواب این مسأله در زمان متناهی به انفجار می‌رسد.

تذکر ۴.۴. در اینجا می‌توان پرسید که آیا شرط ستاره‌ای بودن دامنه لازم است یا نه. برای این منظور دامنه را پوسته $a < r < b$ قرار دهید و فرض کنید تقارن کروی برقرار است. در این حالت نمی‌توان انتظار انفجار جواب را داشت زیرا ذرات نمی‌توانند در یک نقطه جمع شوند (در این صورت تقارن به هم می‌خورد).

همان‌طور که بیان شد، جرم بحرانی در این حالت با حالت کل فضا یکسان است. یکی از نکات برجسته توسعه با صفر در این است که تابع ثابت، حالتی ایستا برای این سیستم نیست، زیرا در شرط مرزی صدق نمی‌کند. بنابراین در ادامه، به مطالعه توزیع‌های ایستا در این حالت می‌پردازیم.

حالات ایستا. از معادله (۱.۴) نتیجه می‌گیریم که حالات ایستا، توابع n هستند که در شرط $\nabla \log n = \chi \nabla S$ صدق می‌کنند. یا معادلاً $\log n = \chi S + \mu$ ، که از شرط پایا بودن جرم به دست می‌آید [۱۴]. پس به معادله زیر برای حالت ایستای این مدل خواهیم رسید،

$$n = M e^{\chi S} / \int_{\Omega} e^{\chi S}, \quad S = K * n. \quad (۵.۴)$$

در اینجا توجه خواننده را به این نکته جلب می‌کنیم که با توجه به اینکه ناحیه مورد نظر، کران دار است و هسته K موضعا انتگرال پذیر، می‌توانیم معادله (۵.۴) را به کمک یک تکنیک نقطه ثابت در فضای توابع پیوسته با نرم سوپرموم، حل کنیم. تنها محدودیت این است که جرم باید از حدی کمتر باشد تا نداشت مورد نظر، انقباض باشد و لذا این تکنیک تمام محدوده پایین جرم بحرانی را پوشش نمی‌دهد. اجازه دهید این مطالب را به صورت دقیق بیان کنیم. ابتدا توجه کنید که با توجه به اینکه $K \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ است، لذا اگر $n \in C(\Omega)$ باشد، چگالی شیمیایی یعنی S هم متعلق به فضای توابع پیوسته خواهد بود و

$$\|S\|_{\infty} \leq C \|n\|_{\infty}, \quad C = \sup_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |K(x-y)| dy.$$

قرار دهید $\mathcal{T}n = M e^{\chi S} / \int_{\Omega} e^{\chi S}$. پس این نگاشت، روی فضای $C(\Omega)$ عمل می‌کند. داریم،

$$\|\mathcal{T}n\|_{\infty} \leq M \frac{e^{\chi \|S\|_{\infty}}}{\int_{\Omega} e^{-\chi \|S\|_{\infty}}} \leq M |\Omega|^{-1} e^{\chi C \|n\|_{\infty}}.$$

اگر M به اندازه کافی کوچک باشد، می‌توانیم $R > 0$ را پیدا کنیم که $M |\Omega|^{-1} e^{\chi C R} < R$ باشد و لذا نگاشت \mathcal{T} ، گوی به شعاع R و به مرکز مبدأ در فضای $C(\Omega)$ را به درون خودش می‌نگارد. اکنون برای دو عنصر n_1, n_2 در این گوی داریم،

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}n_1 - \mathcal{T}n_2\|_{\infty} &= M \left\| \frac{e^{\chi S_1} \int_{\Omega} e^{\chi S_2} - e^{\chi S_2} \int_{\Omega} e^{\chi S_1}}{\int_{\Omega} e^{\chi S_1} \int_{\Omega} e^{\chi S_2}} \right\|_{\infty} \\ &\leq M C_{R,\Omega} \|n_1 - n_2\|_{\infty}. \end{aligned}$$

پس باز هم اگر M به اندازه کافی کوچک باشد، نگاشت T یک انقباض روی این گوی خواهد بود و لذا نقطه ثابت منحصر به فردی خواهد داشت.

در قسمت شبیه‌سازی عددی خواهیم دید که در بُعد ۱، در عمل، این روش نقطه ثابت و استفاده از تکرار، به سرعت به حالت ایستا همگرا می‌شود. در واقع چون تخمین‌های فوق معمولاً بسیار دور از بهینه بودن است، این پدیده قابل انتظار هم هست. به هر حال این بخش را با اثبات قضیه‌ای ادامه خواهیم داد که تمام محدوده پایین جرم بحرانی را پوشش دهد.

قضیه ۵.۴ (وجود حالت ایستا برای توسعه چگالی با صفر). برای $M < M_{\text{crit}}$ ، معادله (۵.۴) حداقل یک جواب دارد که $S \in L^\infty$ ، و n یک کمینه‌ساز برای تابع $\Psi(n)$ است. در حالت ناحیه ستاره‌ای شکل، این معادله برای $M > M_{\text{crit}}$ جوابی ندارد که $n \in L \log L$ باشد.

اثبات. حالت $M > M_{\text{crit}}$ ساده است. اگر به فرض خلف، معادله $\nabla n = \chi n \nabla S$ جواب داشته باشد، آن را در x ضرب کرده و انتگرال می‌گیریم،

$$\int_{\Omega} x \cdot \nabla n = \int_{\Omega} x \cdot n \nabla S \implies -dM + \int_{\partial\Omega} (x \cdot \eta) n = -\frac{\chi}{2d\pi} M^2,$$

که تناقض است. در واقع با توجه به قضیه ۳.۴، تابع لیاپانوف سیستم، نمی‌تواند کمینه‌ساز داشته باشد. برای اثبات وجود حالت ایستا برای $M < M_{\text{crit}}$ ، از تخمین اصلی که از نسخه لگاریتمی نابرابری هاردی-لیتلوود-سوبولف به دست می‌آید شروع می‌کنیم، (دقت کنید که خود را به مجموعه توابع نامنفی n محدود می‌کنیم که انتگرال آنها برابر M است و مجموعه این توابع در فضای $L^1(\Omega)$ بسته است)

$$\Psi(n) \geq C + \left(1 - \frac{M}{M_{\text{crit}}}\right) \int_{\Omega} n \log n \geq C - \left(1 - \frac{M}{M_{\text{crit}}}\right) |\Omega| e^{-1}.$$

به عبارت دیگر چون تابع $x \mapsto x \log x$ کران پایین دارد، تابع $n \mapsto \Psi(n)$ نیز دارای کران پایین است. فرض کنید $\{n_k\}_k$ یک دنباله کمینه‌ساز* باشد. نابرابری اخیر نتیجه می‌دهد $\int_{\Omega} n_k \log n_k$ کران دار است. لذا با توجه به کران دار بودن ناحیه Ω ، $\int_{\Omega} n_k |\log n_k|$ نیز کران یکنواخت نسبت به k دارد. بنابراین خانواده $\{n_k\}_k$ یک خانواده هم-انتگرال‌پذیر است زیرا،

$$\int_{n_k > R} n_k \leq \int_{n_k > R} n_k \frac{|\log n_k|}{\log R} \leq \frac{1}{\log R} \int_{\Omega} n_k |\log n_k|.$$

پس با گذر کردن به یک زیردنباله داریم $n_k \rightarrow n$ به صورت ضعیف در $L^1(\Omega)$. به علت محدب بودن نگاشت $x \mapsto [x \log x]_+$ ، نتیجه می‌گیریم که $n \in L \log L(\Omega)$ و به عبارت دقیق‌تر،

$$\int_{\Omega} n [\log n]_+ \leq \liminf \int_{\Omega} n_k [\log n_k]_+. \quad (۶.۴)$$

*Minimizing Sequence

از نامساوی $ts \leq s \log s - s + e^t$ نتیجه می‌گیریم که $S_k = K * n_k$ در $L^\infty(\Omega)$ کران دار است. در واقع یک $\alpha < \pi d^*$ انتخاب کرده و محاسبه می‌کنیم،

$$\begin{aligned} S_k(x) &= \int_{\Omega} K(x-y)n_k(y) dy \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{n_k}{\alpha} \log \frac{n_k}{\alpha} - \int_{\Omega} \frac{n_k}{\alpha} + \int_{\Omega} e^{\alpha K(x-y)} dy \\ &\leq -\frac{1 + \log \alpha}{\alpha} M + \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} n_k \log n_k + \int_{\Omega} |x-y|^{-\frac{\alpha}{d^*}} dy \\ &\lesssim 1. \end{aligned}$$

اکنون برای هر تابع آزمون $\varphi \in L \log L(\Omega)$ تابع $K * \varphi$ کران دار است و لذا،

$$\int_{\Omega} \varphi S_k = \int_{\Omega} \varphi K * n_k = \int_{\Omega} n_k K * \varphi \longrightarrow \int_{\Omega} n K * \varphi = \int_{\Omega} \varphi K * n = \int_{\Omega} \varphi S.$$

پس نشان دادیم که $S_k \rightarrow S = K * n$ به صورت ضعیف در $L^q(\Omega)$ برای هر $q < \infty$. در قدم بعدی، می‌خواهیم نوعی فشردگی برای دنباله $\{S_k\}_k$ در فضای L^1 نشان دهیم. ابتدا تذکر می‌دهیم که ∇K برای $d \geq 2$ موضعا انتگرال پذیر است. داریم،

$$\nabla S_k = \begin{cases} -\mathbb{H}n_k, & d = 1, \\ \nabla K * n_k, & d \geq 2. \end{cases}$$

از طرف دیگر، چون $\int_{\Omega} n_k [\log n_k]_+$ کران دار است، پس ∇S_k در حالت $d = 1$ نیز در L^1 کران دار است [۳۸، ۸]. این کران داری در حالت $d > 1$ روشن است. در نتیجه $\{S_k\}_k$ در فضای $W^{1,1}$ کران دار است و این فضا در تمامی بعدها، به صورت فشردده در L^1 می‌نشیند. پس باز هم با گذر به یک زیردنباله خواهیم داشت، $S_k \rightarrow S$ به صورت قوی در $L^1(\Omega)$. به علاوه می‌توان این زیردنباله را طوری انتخاب کرد که $S_k \rightarrow S$ تقریبا همه جا. حال داریم،

$$\int_{\Omega} n_k S_k - \int_{\Omega} n S = \int_{\Omega} (n_k - n) S + \int_{\Omega} n_k (S_k - S).$$

جمله اول به سمت صفر خواهد رفت زیرا n_k به طور ضعیف در L^1 به سمت n می‌رود و همچنین $S \in L^\infty$. برای کنترل جمله دوم، برای هر $\varepsilon > 0$ ، طبق هم-انتگرال پذیری n_k ها، $\delta > 0$ یافت می‌شود که انتگرال n_k روی هر مجموعه‌ای با اندازه کوچکتر از δ ، از ε کوچکتر باشد. اکنون استفاده از قضیه اگوروف* روی دنباله $\{S_k\}_k$ ، نتیجه می‌دهد که می‌توان زیرمجموعه‌ای از Ω مانند U با اندازه کوچکتر از δ پیدا کرد طوری که $S_k \rightarrow S$ به طور یکنواخت روی $\Omega \setminus U$. پس

$$\int_{\Omega} n_k (S_k - S) = \int_{\Omega \setminus U} n_k (S_k - S) + \int_U n_k (S_k - S).$$

*Egorov's Theorem

باز هم طبق همگرایی یکنواخت S_k روی $\Omega \setminus U$ ، جمله اول به سمت صفر می‌رود. اگر کران یکنواخت S_k در L^∞ را هم A بنامیم، عبارت دوم هم از $2A\varepsilon$ کوچکتر است و چون ε دلخواه است، نتیجه می‌گیریم،

$$\int_{\Omega} n_k S_k \longrightarrow \int_{\Omega} n S.$$

از ترکیب این نتیجه با (۶.۴) خواهیم داشت،

$$\Psi(n) = \int_{\Omega} n \log n - \frac{\chi}{\gamma} \int_{\Omega} n S \leq \liminf \Psi(n_k) = \inf \Psi.$$

و اثبات کامل است. \square

تذکر ۶.۴. در اینجا مسأله یکتایی حالت ایستا برای این سیستم مطرح می‌شود. می‌توان به کمک تحدب روی مسیره‌های مناسب همانند [۳۰] این یکتایی را نیز ثابت نمود.

تذکر ۷.۴. وقتی $M \rightarrow M_{\text{crit}}$ ، می‌توان بررسی کرد که با گذر به یک زیردنباله، رفتار زیر برای یک $x^* \in \bar{\Omega}$ حاصل می‌شود،

$$\begin{aligned} n &\longrightarrow M_{\text{crit}} \delta(x - x^*), && \text{به معنای ضعیف در اندازه‌ها،} \\ S &\longrightarrow -\frac{2d}{\chi} \log|x - x^*|, && \text{در فضای } L^p \text{ برای هر } 1 \leq p < \infty \\ \nabla S &\longrightarrow -\frac{2d}{\chi} \frac{x - x^*}{|x - x^*|^2}, && \text{در فضای } L^p \text{ برای هر } 1 \leq p < d \end{aligned}$$

در واقع چون $\nabla n = \chi n \nabla S$ است، بعد از آزمون نسبت به x و انتگرال‌گیری جزء به جزء، خواهیم داشت $\int_{\partial\Omega} (x \cdot \eta) n(x) \rightarrow 0$. در حالتی که ناحیه Ω ستاره‌ای شکل باشد، نتیجه می‌گیریم که $n(x)$ روی مرز، بایستی به سمت صفر برود. از طرف دیگر کران پایین S و برابری (۵.۴) نشان می‌دهد که این اتفاق تنها زمانی می‌افتد که $\int_{\Omega} e^{\chi S} \rightarrow \infty$ باشد و لذا $\int_{\Omega} n \log n \rightarrow \infty$. برای اینکه پیش‌تر برویم و نشان دهیم که فقط یک نقطه تجمع به وجود می‌آید، تکنیک دقیق‌تر، اما استانداردی باید به کار گرفته شود که می‌توان در [۲۳، ۲۲] دنبال کرد.

۴-۲ توسعه چگالی با مقدار میانگین

اصلی‌ترین اشکال توسعه چگالی با صفر، این است که چگالی ثابت، حالتی ایستا نیست. این مسأله در مدل دیگری که در این بخش معرفی می‌کنیم برطرف می‌شود. پیشنهاد می‌کنیم که n را در خارج از دامنه با مقدار میانگین آن یعنی $\langle n \rangle_{\Omega}$ توسعه دهیم. برای دستیابی به این منظور در واقع بهتر است که پتانسیل شیمیایی را مجدداً به صورت زیر تعریف کنیم،

$$S = K * (n - \langle n \rangle_{\Omega}), \quad n(x) = \langle n \rangle_{\Omega}; \quad x \notin \Omega,$$

که متناظر شرط مرزی نیومن برای مدل کلاسیک است [۲۶]. برای سادگی نمادگذاری، تعریف می‌کنیم $\tilde{n} = n - \langle n \rangle_\Omega$ و لذا $S = K * \tilde{n}$. تابع انرژی نزولی برای این دستگاه معادلات به صورت زیر است،

$$\Psi(n) = \int_{\Omega} n \log n - \frac{\chi}{2} \int_{\Omega} \tilde{n} S, \quad \tilde{n} = n - \langle n \rangle_\Omega, \quad S = K * \tilde{n}.$$

اکنون نتایج وجود و انفجار جواب را به صورت زیر بیان می‌کنیم،

قضیه ۸.۴ (جرم بحرانی برای حالت توسعه چگالی با مقدار میانگین). فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ یک دامنه کران دار باشد و $n_0 \log n_0 \in L^1$ با فرض $M < M_{\text{crit}}$ ، دستگاه معادلات (۷.۲) به همراه $S = K * (n - \langle n \rangle_\Omega)$ یک جواب ضعیف سراسری دارد. برعکس در حالتی که Ω ستاره‌ای باشد و $d \geq 2$ ، اگر $M > M_{\text{crit}}$ و گشتاور دوم در لحظه شروع، یعنی $I(0)$ ، به اندازه کافی کوچک باشد، آنگاه جواب (۷.۲) در زمان متناهی به انفجار می‌رسد.

جواب سراسری. فقط تغییرات اندکی به نسبت فصل پیش خواهیم داشت. ایده کلیدی این است که چون جرم ثابت است، با اضافه کردن مقدار ثابت میانگین به \tilde{n} ، به همان حالت گسترش با صفر خواهیم رسید. به عبارت دقیق‌تر اگر تعریف کنیم $\zeta = \langle n \rangle_\Omega \mathbf{1}_\Omega$ ، آنگاه $\tilde{n} + \zeta$ در واقع همان گسترش با صفر است و

$$\int_{\Omega} n \log n - \frac{\chi}{2} \int_{\Omega} (\tilde{n} + \zeta) K * (\tilde{n} + \zeta) = \Psi(n) + \dots$$

جملات باقیمانده کران دار هستند زیرا هسته K موضعا انتگرال پذیر است. بقیه اثبات اساسا همانند قبل است.

تذکر ۹.۴. اگرچه در حالت مدل کلاسیک، جرم بحرانی برای شرط مرزی دیریشله و شرط مرزی نیومن متفاوت است، اما در این مدل تصحیح شده، جرم بحرانی یکی است. در واقع انحنای مرزی در این حالت، نقشی را در تأثیر روی جرم بحرانی ایفا نمی‌کند. علت این پدیده این است که تکینگی هسته بواسون برای این ناحیه کران دار روی مرز آن، در هسته $K(z) = -\frac{1}{d\pi} \log |z|$ دیگر وجود ندارد.

انفجار جواب. همانند بخش قبلی، مشتق زمانی گشتاور دوم را در حالت ناحیه ستاره‌ای $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ و $d \geq 2$ محاسبه می‌کنیم،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I &= - \int_{\partial\Omega} (x \cdot \eta) n + dM - \frac{\chi}{2d\pi} M^\gamma + \frac{\chi}{d\pi} \langle n \rangle_\Omega \int_{\Omega} \int_{\Omega} n(x) \frac{x \cdot (x - y)}{|x - y|^2} dy dx \\ &\leq dM - \frac{\chi}{2d\pi} M^\gamma + \frac{\chi}{d\pi} \langle n \rangle_\Omega \int_{\Omega} \int_{\Omega} |x| n(x) |x - y|^{-1} dy dx \\ &\leq dM \left(1 - \frac{M}{M_{\text{crit}}} \right) + C \frac{\chi M}{d\pi |\Omega|} \int_{\Omega} |x| n(x) dx \\ &\leq dM \left(1 - \frac{M}{M_{\text{crit}}} \right) + C \frac{\chi M}{d\pi |\Omega|} \sqrt{MI}. \end{aligned}$$

مقدار دقیق ثابت C به صورت زیر است،

$$C = \sup_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |x - y|^{-1} dy \leq \frac{d}{d-1} |\mathbb{S}^{d-1}|^{\frac{1}{d}} |\Omega|^{1-\frac{1}{d}}.$$

این نامساوی را می‌توان با تقسیم انتگرال به دو ناحیه $|x - y| \leq \lambda$ و $|x - y| > \lambda$ و سپس بهینه کردن نتیجه نسبت به λ به دست آورد. به عبارت دقیق،

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |x - y|^{-1} dy &= \int_{|x-y| \leq \lambda} |x - y|^{-1} dy + \int_{|x-y| > \lambda} |x - y|^{-1} dy \\ &\leq \int_{|y| < \lambda} |y|^{-1} dy + |\Omega| \lambda^{-1} \\ &= \frac{1}{d-1} |\mathbb{S}^{d-1}| \lambda^{d-1} + |\Omega| \lambda^{-1}. \end{aligned}$$

کمینه این عبارت به ازای $\lambda = (|\Omega|/|\mathbb{S}^{d-1}|)^{1/d}$ است که نتیجه مطلوب را به دست می‌دهد. در نهایت خواهیم داشت،

$$\frac{d}{dt} I \leq dM \left(1 - \frac{M}{M_{\text{crit}}} \right) + \frac{\chi |\mathbb{S}^{d-1}|^{\frac{1}{d}}}{\pi(d-1)} M^{3/2} |\Omega|^{-\frac{1}{d}} \sqrt{I}. \quad (7.4)$$

در نتیجه اگر $I(0)$ به اندازه کافی کوچک باشد طوری که سمت راست (7.4) در لحظه اولیه، منفی باشد، آنگاه جواب در زمان متناهی منفجر خواهد شد.

تذکر ۱۰.۴. عبارت $|\Omega|^{-\frac{1}{d}} \sqrt{I}$ نسبت به انبساط Ω ناورد است که این حقیقت، محاسبات بالا را توجیه می‌کند. در ضمن فرض کوچک بودن گشتاور دوم در لحظه اولیه لازم است، به عنوان نمونه چگالی ثابت را در نظر بگیرید که برای هیچ جرمی، منفجر نخواهد شد. بنابراین یک کران بالا برای $I(0)$ برای اثبات انفجار، لازم به نظر می‌رسد.

۴-۳ بُعد ۱ و محیط متناوب

اگر مدل (7.2) را در یک بُعد در نظر بگیریم، مسأله در حالت محیط متناوب هم قابل بررسی است. در این حالت، این دستگاه معادلات به صورت زیر بازنویسی می‌شود،

$$\begin{cases} \partial_t n = \Delta n - \chi \nabla \cdot (n \nabla S), & t > 0, x \in \mathbb{S}^1, \\ \nabla S = -\mathbb{H}n, & t > 0, x \in \mathbb{S}^1, \\ n(t=0) = n_0 \geq 0. \end{cases} \quad (8.4)$$

در واقع در این حالت، هسته مورد نظر برای محاسبه S ، به صورت $K(z) = -\frac{1}{\pi} \log |\sin \pi z|$ در می‌آید، به طوری که منفی گرادیان آن، همان هسته تبدیل هیلبرت روی دایره یعنی $\cot \pi z$ خواهد بود.

*Dilatation

وجود جواب. در این حالت نیز همان تابعک لیاپانوف را خواهیم داشت،

$$\Psi(n) = \int_{\mathbb{S}^1} n \log n - \frac{\chi}{2} \int_{\mathbb{S}^1} n S, \quad S = K * n, \quad (9.4)$$

طوری که $\frac{d}{dt} \Psi(n) = - \int_{\mathbb{S}^1} n |\nabla n - \chi \nabla S|^2 \leq 0$. اکنون دقت کنید که اختلاف دو هسته در حالت دایره و کل فضا، یعنی $K_1(z) - K(z) = \frac{1}{\pi} \log \frac{|\sin \pi z|}{|z|}$ یک تابع کران دار است و لذا با توجه به اینکه نامساوی لگاریتمی هاردی-لیتلوود-سوبولف روی دایره نیز برقرار است [۱۳]، لذا تمامی اثبات‌ها دوباره در این حالت نیز تکرار می‌شود. البته دوباره به تخمینی مشابه گشتاور دوم احتیاج داریم که در اینجا با کمیت دیگری جایگزین خواهد شد و در ادامه مطلب، آن را بیان می‌کنیم.

انفجار جواب. در این حالت به جای گشتاور دوم چگالی، بایستی از کمیت زیر استفاده کنیم،

$$J(t) = \int_{\mathbb{S}^1} n(t, x) \cos 2\pi x \, dx.$$

با محاسبه مشتق زمانی این کمیت خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-1} \frac{d}{dt} J &= \int_{\mathbb{S}^1} (2\pi)^{-1} \cos 2\pi x \, \partial_t n \\ &= \int_{\mathbb{S}^1} (2\pi)^{-1} \cos 2\pi x \, \partial_x (\partial_x n + \chi n \mathbb{H}n) \\ &= \int_{\mathbb{S}^1} \sin 2\pi x (\partial_x n + \chi n \mathbb{H}n) \\ &= -2\pi J + \frac{\chi}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\mathbb{S}^1} (\sin 2\pi x - \sin 2\pi y) \cot \pi(x-y) n(x)n(y) \, dx \, dy, \end{aligned}$$

که خط آخر با توجه به اینکه روی دایره $\mathbb{H}n = \text{p.v.} \cot(\pi x) * n$ است و استفاده از تقارن این هسته به دست آمده است. پس،

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-1} \frac{d}{dt} J &= -J + \frac{\chi}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\mathbb{S}^1} \cos \pi(x+y) \cos \pi(x-y) n(x)n(y) \, dx \, dy \\ &= -J + \frac{1}{M_{\text{crit}}} \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\mathbb{S}^1} \frac{1}{2} (\cos 2\pi x + \cos 2\pi y) n(x)n(y) \, dx \, dy \\ &= -\left(1 - \frac{M}{M_{\text{crit}}}\right) J. \end{aligned}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $J(t) = J(0) e^{-2\pi^2 (1-M/M_{\text{crit}}) t}$. پس اگر $M > M_{\text{crit}}$ و $J(0) \neq 0$ باشد، آنگاه با توجه به اینکه بایستی $|J(t)|$ از M کوچک‌تر بماند، جواب در زمان متناهی به انفجار می‌رسد. می‌توان در این محاسبات جای \cos و \sin را عوض کرد و لذا در نهایت نتیجه می‌شود که برای انفجار جواب کافی

است که ضریب اول فوریه چگالی ذرات در لحظه صفر، ناصفر باشد، البته با این فرض که بالای جرم بحرانی قرار داریم. نکته جالب توجه اینجاست که اگر این ضریب برابر صفر باشد، دیگر حداقل نمی توان انتظار تجمع ذرات در یک نقطه را داشت؛ در این صورت بایستی $\cos 2\pi x$ و $\sin 2\pi x$ هر دو در نقطه تجمع، برابر صفر باشند که امکان پذیر نیست. اما بایستی به این نکته هم توجه داشت که این پدیده، شدیداً نسبت به شرایط اولیه ناپایدار است و با تغییر هر چند اندک در شرط اولیه، جواب حتماً به انفجار می رسد. این مسأله را در شبیه سازی های عددی می توان مشاهده نمود. در واقع به نظر می رسد که اگر ضریب فوریه اول چگالی ذرات تقریباً صفر باشد، زمان بسیار طولانی تری لازم است تا جواب به انفجار برسد. به خصوص حالت ایستای چگالی ثابت نیز شدیداً ناپایدار است.

۴-۴ محاسبات عددی در بُعد ۱

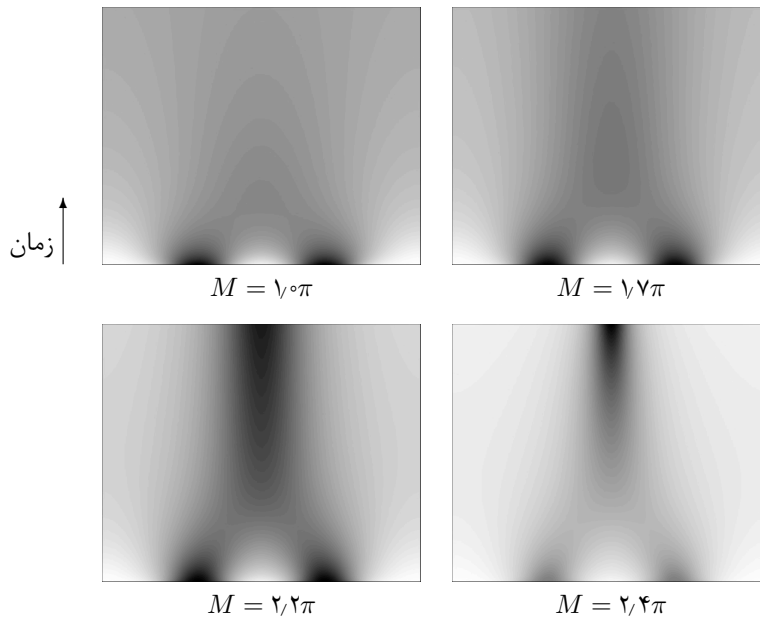
در این بخش شبیه سازی های عددی را برای مدل تصحیح شده در یک بُعد بیان می کنیم. برای انجام محاسبات عددی، مشکلی برای مشتق زمانی و جمله پخش نخواهیم داشت. می توان آنها را گسسته سازی کرد و این روش برای ایجاد پایداری، می تواند روش گسسته سازی ضمنی* انتخاب شود. مسأله اصلی در جمله رانش به وجود می آید. به خصوص نیازمند محاسبه چگالی ماده شیمیایی در هر دوره از محاسبه هستیم و این محاسبه بایستی با یک عمل گر پیچش انجام شود. ساده ترین و طبیعی ترین روش، محاسبه انتگرال پیچش به صورت صریح# و با کمک ضرب هسته در مقادیر چگالی ذرات در نقاط گسسته سازی شده و جمع بستن روی آنها است. توجه کنید که مشکل است که این جمله را هم به صورت ضمنی گسسته کنیم زیرا در این صورت بایستی یک معادله غیرخطی را حل کنیم. همان طور که در [۱۲] بیان شده است، این روش به شدت تحت تأثیر میزان دقت قدم های گسسته سازی مکان خواهد بود و با توجه به اینکه انجام محاسبات از مرتبه توان دوم تعداد نقاط مکانی است، این دقت را از حدی به بالاتر نمی توان برد و محاسبات کند خواهد بود. در اینجا یک ایده تکمیلی مطرح می کنیم.

در واقع می توان عمل گر پیچش را به کمک تبدیل فوریه گسسته و استفاده از الگوریتم FFT بسیار سریع تر محاسبه نمود. اما یک مشکل جدی به وجود می آید: با توجه به تکینگی موجود در هسته $\frac{1}{\pi x}$ ، باز هم محاسبه تبدیل فوریه گسسته این هسته برای مقادیر کوچک قدم مکانی، بسیار بی دقت است. اما می توان این مشکل را برطرف نمود، به این صورت که با توجه به اینکه تبدیل فوریه گسسته برای هسته $\cot \pi x$ معلوم است، کافی است تبدیل فوریه گسسته اختلاف این دو هسته را محاسبه نماییم که دیگر تکینگی ندارد و کران دار است. اگر در حالت محیط متناوب باشیم، دیگر احتیاجی به محاسبه اضافی هم نیست.

در ادامه، شبه برنامه† عملیات محاسبه در حالت محیط متناوب را که مناسب MATLAB است می آوریم،

```
M = ...; N = 2*...; dt = ...;
dx = 1/N;
```

*Implicit #Explicit †Pseudocode

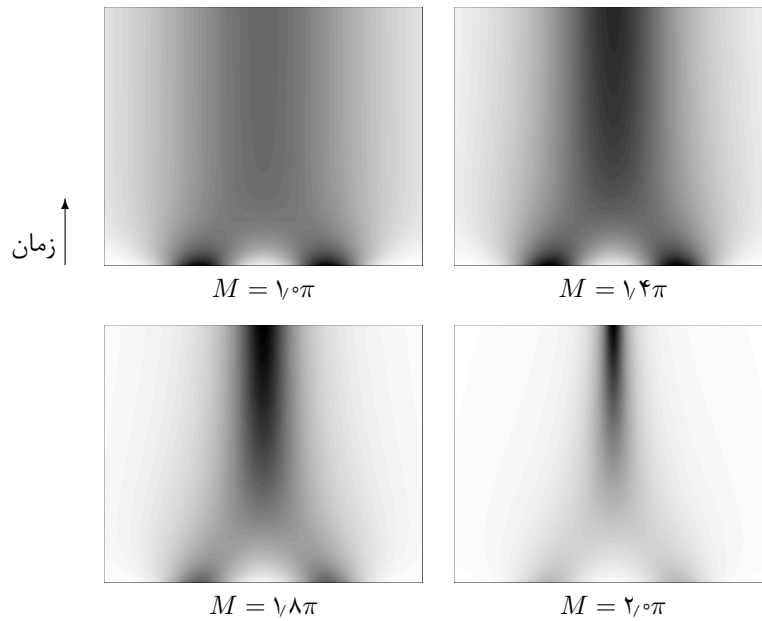


شکل ۱.۴: دو توده جرم، مدل ماکروسکوپی، محیط متناوب

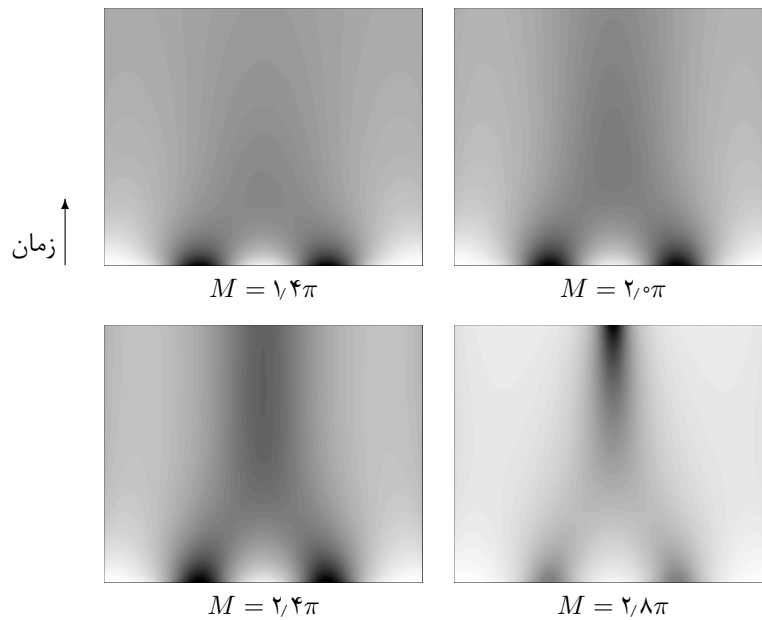
در اینجا $n_0 = C_M (\exp(-100(x - 0.2)^2) + \exp(-100(x + 0.2)^2))$ به عنوان شرط اولیه است و ثابت C_M به گونه‌ای است که جرم کل، برابر M باشد. در این تصاویر، تحول چگالی ذرات را می‌بینید و پارامترها به صورت $\tau/h^2 = 8$ و $h = 2^{-10}$ انتخاب شده‌اند و تا زمان $T = 0.1$ پیش رفته‌ایم.

```
x = (-(N-1)/2:(N-1)/2)*dx;
n0 = ...;
FH = -1i*[0 ones(1,N/2-1) 0 -ones(1,N/2-1)]';
n = M*n0/(sum(n0)*dx);
while (true)
    gS = -ifft(FH.*fft(n)); %replace n by n-M for extension by mean value.
    nonlin = n.*gS;
    Dterm = -(circshift(nonlin,-1)-circshift(nonlin,1))/(2*dx);
    n = DI*(n+dt.*Dterm)
end
```

در شکل ۱.۴ مدل را در دامنه متناوب در نظر گرفته‌ایم و دو توده جرم را در دو نقطه قرار داده‌ایم. تحول چگالی را به ازای جرم‌های مختلف در این شکل مشاهده می‌کنید. در شکل ۲.۴ همین کار را برای حالت توسعه چگالی با صفر انجام داده‌ایم و شکل ۳.۴ به حالت توسعه چگالی با مقدار میانگین اختصاص یافته است. می‌توان دید که به خاطر دافعه‌ای که مرز در حالت توسعه با صفر دارد، تمرکز جرم برای جرم‌های کوچکتر و همچنین بسیار سریع‌تر شکل می‌گیرد. برعکس در حالت توسعه چگالی با مقدار میانگین، مرز، جاذب جرم است و لذا به جرم بیشتر و گشتاور دوم کمتری برای انفجار جواب نیاز است. در واقع در این حالت اگر با داده‌های اولیه نامتقارن شروع کنیم، انفجار ممکن است در نزدیک مرز اتفاق بیافتد.

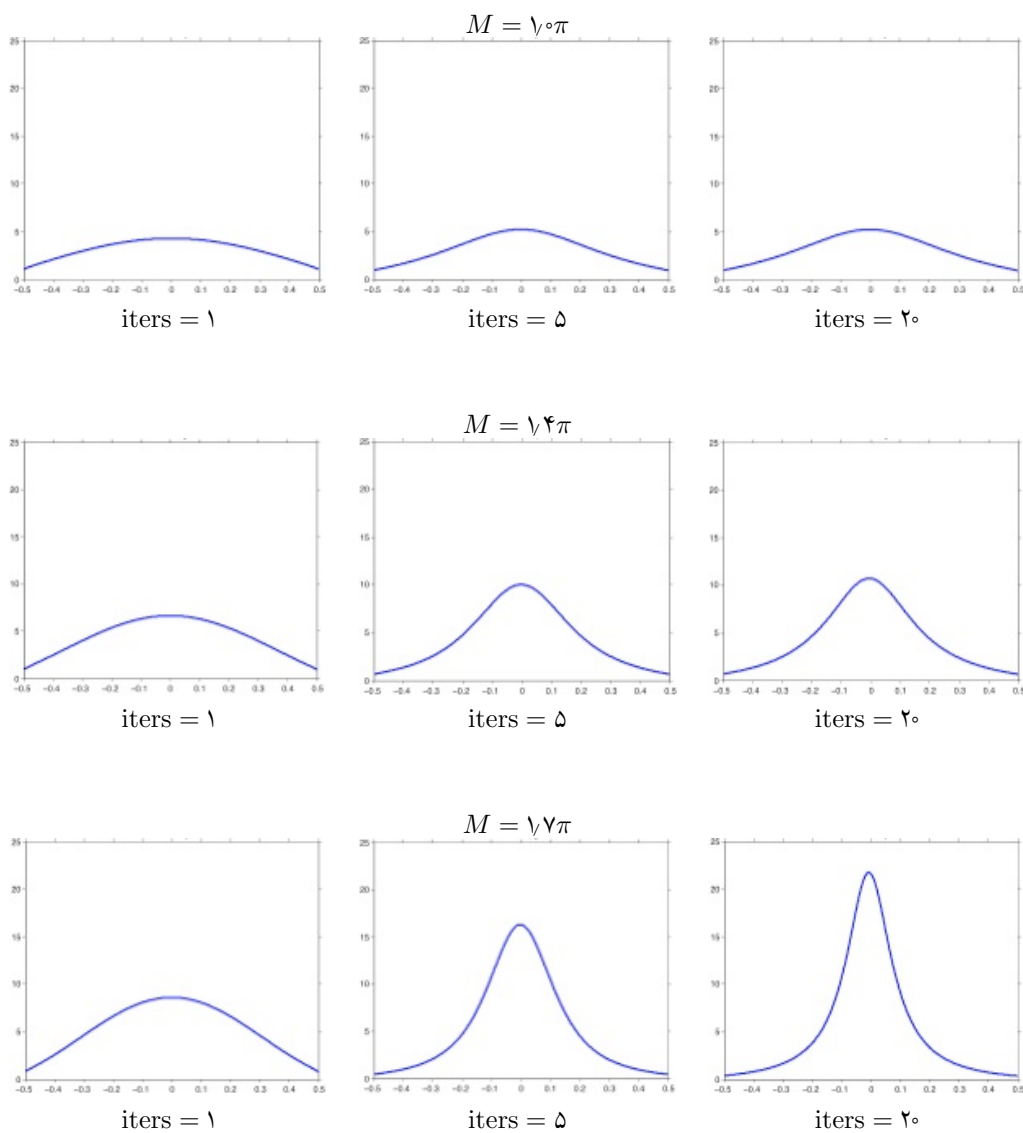


شکل ۲.۴: دو توده جرم، مدل ماکروسکوپی، توسعه با صفر در اینجا $n_0 = C_M(\exp(-۱۰۰(x - ۰/۲)^۲) + \exp(-۱۰۰(x + ۰/۲)^۲))$ به عنوان شرط اولیه است و ثابت C_M به گونه‌ای است که جرم کل، برابر M باشد. پارامترها همانند شکل ۱.۴ انتخاب شده‌اند.



شکل ۳.۴: دو توده جرم، مدل ماکروسکوپی، توسعه با میانگین در اینجا $n_0 = C_M(\exp(-۱۰۰(x - ۰/۲)^۲) + \exp(-۱۰۰(x + ۰/۲)^۲))$ به عنوان شرط اولیه است و ثابت C_M به گونه‌ای است که جرم کل، برابر M باشد. پارامترها همانند شکل ۱.۴ انتخاب شده‌اند.

حالت ایستا برای توسعه چگالی با صفر همانطور که اشاره شد، حالت ایستا برای توسعه چگالی با صفر، جواب معادله (۵.۴) است. به کمک تکرار می‌توان این حالات را به صورت عددی محاسبه نمود. در شکل ۴.۴ نتیجه این محاسبات را مشاهده می‌کنید.



شکل ۴.۴: حالت ایستا، مدل ماکروسکوپی، توسعه با صفر در اینجا با شروع از تابع ثابت، با روش تکرار، به حالت ایستا برای توسعه چگالی با صفر رسیده‌ایم.

۵ برخی خواص فضاهای سوبولوف در بُعد ۱

در این فصل، برخی خواص فضای سوبولوف کسری در یک بُعد را مطالعه می‌کنیم. اگرچه تخمین‌های ارائه‌شده در این فصل، به صورت کلی شناخته‌شده هستند، اما در اینجا آنها را منظم کرده‌ایم و نابرابری‌ها را با مقدار دقیق ثابت‌ها بیان می‌کنیم. لذا مطالب ارائه‌شده در این فصل، مستقلاً می‌تواند به ویژه در مسائل بهینه‌سازی، کاربرد داشته باشد. همچنین در انتها یک قضیه مفید و جالب اثبات می‌کنیم که نشان می‌دهد نگاشت بُرش* روی برخی فضاهای سوبولوف، پیوسته است. خواننده آشنا با خواص فضاهای سوبولوف، می‌تواند از این فصل عبور کند و تنها در صورت لزوم به آن مراجعه نماید.

همان‌گونه که در مقدمه رساله اشاره کرده‌ایم، فضای سوبولوف کسری، به سادگی به کمک تبدیل فوریه با نُرم زیر تعریف می‌شود،

$$\|\varphi\|_{H^s} = \left\| (1 + 4\pi^2|\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}\varphi(\xi) \right\|_2.$$

۵-۱ نامساوی‌های دقیق برای فضای سوبولوف

در بُعد یک برای $s > 1/2$ ، فضای H^s ، در فضای توابع کران‌دار، L^∞ ، می‌نشیند که این مطلب را در ادامه در لم ۶.۵ خواهیم دید. در حالت $s = 1$ می‌توان تخمین‌های دقیق‌تری نیز داشت.

لم ۱.۵. برای هر $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$

$$\max\{\|\varphi\|_\infty, \|\mathcal{H}\varphi\|_\infty\} \leq \|\varphi\|_2^{1/2} \|\partial_x \varphi\|_2^{1/2} \quad (1.5)$$

$$\leq \|\varphi\|_2^{1/3} \|\partial_x \varphi\|_2^{2/3}. \quad (2.5)$$

اثبات.

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_\infty &\leq \|\mathcal{F}\varphi\|_1 \\ &\leq \left\| (1 + 4\varepsilon^2 \pi^2 \xi^2)^{-1/2} \right\|_2 \left\| (1 + 4\varepsilon^2 \pi^2 \xi^2)^{1/2} \mathcal{F}\varphi(\xi) \right\|_2 \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}} (\|\varphi\|_2 + \varepsilon \|\partial_x \varphi\|_2). \end{aligned}$$

*Truncation map

اکنون $\varepsilon = \|\varphi\|_2 / \|\partial_x \varphi\|_2$ انتخاب کنید. تخمین مشابه برای $\mathcal{H}\varphi$ برقرار است. اکنون داریم،

$$\|\varphi\|_2^2 = \|\mathcal{F}\varphi\|_2^2 \leq \|\mathcal{F}\varphi\|_\infty \|\mathcal{F}\varphi\|_1 \leq \|\varphi\|_1 (\|\varphi\|_2 \|\partial_x \varphi\|_2)^{1/2}.$$

و لذا

$$\|\varphi\|_2 \leq \|\varphi\|_1^{2/3} \|\partial_x \varphi\|_2^{1/3},$$

□ که نابرابری (۲.۵) را به اثبات می‌رساند.

تذکره ۲.۵. در نابرابری (۱.۵) نمی‌توان ثابتی کوچک‌تر از یک قرار داد. برای دیدن این مطلب، قرار دهید $\varphi(x) = Ce^{-\lambda|x-x_0|}$ در واقع این خانواده از توابع، تنها توابعی در $H^1(\mathbb{R})$ هستند که برای آنها این نابرابری به تساوی تبدیل می‌شود. برای نشان دادن این نکته، توجه کنید که در اثبات این نابرابری، برای اینکه دومین تخمین به تساوی مبدل شود لازم است که $|\mathcal{F}\varphi(\xi)| = C/(1 + 4\pi^2\varepsilon^2\xi^2)$ ، یعنی،

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) = \frac{Ce^{i\pi i\theta\xi}}{1 + 4\pi^2\varepsilon^2\xi^2}.$$

اکنون برای اینکه اولین تخمین هم به تساوی تبدیل شود، احتیاج داریم که قدر مطلق مقدار تابع در یک نقطه مثل x_0 ، به صورت زیر باشد،

$$|\varphi(x_0)| = \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}\varphi(\xi)| d\xi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|C|}{1 + 4\pi^2\varepsilon^2\xi^2} d\xi.$$

از طرف دیگر داریم،

$$\varphi(x_0) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\pi i x_0 \xi} \mathcal{F}\varphi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \frac{Ce^{i\pi i(x_0\xi + \theta\xi)}}{1 + 4\pi^2\varepsilon^2\xi^2} d\xi,$$

و در نتیجه،

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + 4\pi^2\varepsilon^2\xi^2} d\xi = \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\pi i(x_0\xi + \theta\xi)}}{1 + 4\pi^2\varepsilon^2\xi^2} d\xi \right|,$$

و این تساوی فقط وقتی برقرار است که $\theta\xi = \theta_0 - x_0\xi$ باشد. لذا φ مضربی از یگانه جواب ضعیف معادله $\varphi(x) = Ce^{-\varepsilon^{-1}|x-x_0|}$ خواهد بود، یعنی $\varphi - \varepsilon^2\Delta\varphi = \delta_{x_0}$.

نتیجه مطالب بیان‌شده یک نکته جالب در مسائل بهینه‌سازی خواهد بود: اگر تابع هدف

$$J(\varphi) = \|\varphi\|_\infty, \quad \varphi \in H^1(\mathbb{R}),$$

را در نظر بگیریم خواهیم داشت،

$$\max_{\|\varphi\|_{H^1}=1} J(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} = J(\varphi_{x_0}^\pm),$$

که،

$$\varphi_{x_0}^{\pm}(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-|x-x_0|},$$

و اگر $\|\varphi\|_{H^1} = 1/\sqrt{2}$ و $J(\varphi) = 1/2$ ، آنگاه $\varphi = \varphi_{x_0}^{\pm}$ برای یک $x_0 \in \mathbb{R}$.

تذکر ۳.۵. نابرابری‌های فوق برای دایره نیز درست هستند، به شرط اینکه به جای φ قرار دهیم $\langle \varphi \rangle - \varphi$. به عبارت دقیق‌تر،

$$\max\{\|\varphi - \langle \varphi \rangle\|_{\infty}, \|\mathcal{H}\varphi\|_{\infty}\} \leq \|\varphi - \langle \varphi \rangle\|_2^{1/2} \|\partial_x \varphi\|_2^{1/2} \leq \|\varphi\|_2^{1/2} \|\partial_x \varphi\|_2^{1/2}.$$

منظور از $\langle \varphi \rangle = \mathcal{F}\varphi(0)$ متوسط تابع φ روی دایره است. اثبات این موضوع همانند اثبات لم ۱.۵ است، با توجه به این حقیقت که عنصر متناظر صفر سری فوریه برابر صفر می‌شود. این حقیقت به خودی خود برای $\mathcal{H}\varphi$ برقرار است.

در روی دایره، می‌توان تخمین مشابهی داشت که با توجه به فشردگی* بودن دایره، فقط شامل مشتق تابع است،

لم ۴.۵. برای هر $\varphi \in H^1(\mathbb{S}^1)$ ،

$$\max\{\|\varphi - \langle \varphi \rangle\|_{\infty}, \|\mathcal{H}\varphi\|_{\infty}\} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \|\partial_x \varphi\|_2. \quad (۳.۵)$$

اثبات.

$$\begin{aligned} \|\varphi - \langle \varphi \rangle\|_{\infty} &\leq \sum_{\substack{\xi \in \mathbb{Z} \\ \xi \neq 0}} |\mathcal{F}\varphi(\xi)| \\ &\leq \left(\sum_{\xi \neq 0} \frac{1}{4\pi^2 \xi^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{\xi \neq 0} 4\pi^2 \xi^2 |\mathcal{F}\varphi(\xi)|^2 \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \|\partial_x \varphi\|_2. \end{aligned}$$

□

اثبات برای $\mathcal{H}\varphi$ دقیقاً همین است.

تذکر ۵.۵. در این حالت نیز ممکن است تساوی برقرار شود. قرار دهید $\varphi(x) = x^2$ ، $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. در حقیقت با بحثی مشابه تذکر ۲.۵ می‌توان ثابت کرد که اگر تابع هدف زیر را داشته باشیم،

$$J(\varphi) = \|\varphi\|_{\infty}, \quad \varphi \in H^1(\mathbb{S}^1),$$

*Compact

آنگاه،

$$\max_{\substack{\|\partial_x \varphi\|_2=1 \\ \langle \varphi \rangle = 0}} J(\varphi) = \frac{1}{2\sqrt{3}} = J(\varphi_{x_*}^\pm),$$

که،

$$\varphi_{x_*}^\pm(x) = \pm\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - (x - x_*)^2\right),$$

و اگر $\|\partial_x \varphi\|_2 = 1$ ، $\langle \varphi \rangle = 0$ و $J(\varphi) = 1/(2\sqrt{3})$ ، آنگاه $\varphi = \varphi_{x_*}^\pm$ برای یک $x_* \in \mathbb{S}^1$.

۵-۲ خواص فضای سوبولوف کسری

در این بخش به حالت کلی فضای سوبولوف کسری باز می‌گردیم. همانطور که پیش‌تر اشاره شد، در بُعد ۱ برای $s > 1/2$ ، فضای H^s ، در فضای توابع کران‌دار، L^∞ ، می‌نشیند و در نتیجه نسبت به ضرب نقطه‌ای توابع، بسته است. همچنین به کمک تبدیل فوریه، روشن است که این فضا توسط نگاشت هیلبرت تعمیم یافته، به خودش نگاشته می‌شود. به علاوه این توابع در یک تخمین هولدر نیز صدق می‌کنند. این نتایج را در لم زیر جمع‌بندی کرده‌ایم.

لم ۶.۵. برای هر $\varphi, \psi \in H^s$ که $1/2 < s \leq 1$ داریم،

$$\|\mathcal{H}\varphi\|_{H^s} = \|\varphi\|_{H^s}, \quad (4.5)$$

$$\max\{\|\varphi\|_\infty, \|\mathcal{H}\varphi\|_\infty\} \lesssim \|\varphi\|_{H^s}, \quad (5.5)$$

$$\|\varphi\psi\|_{H^s} \lesssim \|\varphi\|_{H^s}\|\psi\|_{H^s}, \quad (6.5)$$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \lesssim \|\varphi\|_{H^s}|x - y|^{s-1/2}. \quad (7.5)$$

اثبات. برابری (۴.۵) واضح است و (۵.۵) به کمک تکنیک مشابه اثبات لم‌های ۱.۵ و ۴.۵ ثابت می‌شود. در حالت کل خط حقیقی، برای اثبات نابرابری (۶.۵) داریم،

$$\begin{aligned} |\xi|^s |\widehat{\varphi\psi}(\xi)| &= |\xi|^s |\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}(\xi)| \\ &\leq |\xi|^s \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(\xi - \zeta)\widehat{\psi}(\zeta)| d\zeta \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} (|\xi - \zeta|^s + |\zeta|^s) |\widehat{\varphi}(\xi - \zeta)\widehat{\psi}(\zeta)| d\zeta \\ &= (|\xi|^s |\widehat{\varphi}|) * |\widehat{\psi}|(\xi) + (|\xi|^s |\widehat{\psi}|) * |\widehat{\varphi}|(\xi), \end{aligned}$$

و چون $\widehat{\varphi}$ و $\widehat{\psi}$ مطلقاً انتگرال پذیر هستند، لذا مجذور $|\xi|^s |\widehat{\varphi\psi}(\xi)|$ انتگرال پذیر است. برای اثبات (۷.۵) داریم،

$$\begin{aligned} \|\varphi(\cdot + h) - \varphi(\cdot)\|_\infty &\leq \|(e^{i\pi h\xi} - 1)\mathcal{F}\varphi(\xi)\|_1 \\ &\leq \left\| \frac{e^{i\pi h\xi} - 1}{(1 + 4\pi^2\xi^2)^{s/2}} \right\|_2 \|\varphi\|_{H^s}. \end{aligned}$$

کافی است برای محاسبه نُرم بالا، انتگرال مربوطه را به دو قسمت $|\xi| > h^{-1}$ و $|\xi| < h^{-1}$ جدا کنیم تا اثبات کامل گردد. اثبات برای دایره هم مشابه است. \square

در ادامه به بررسی نگاشت بُرش* می پردازیم. این نگاشت به وضوح روی فضای L^2 یک انقباض است، اما برای بررسی آن روی فضای سوبولوف، به دقت بیشتری نیاز است. برای اینکه بُرش هر تابع عضو فضای H^s در همین فضا باقی بماند، نیاز داریم که $s \leq 1$ باشد زیرا تابع بُرش شده در حالت کلی مشتقات مرتبه بالاتر از یک ندارد. در لم زیر نشان می دهیم که این نگاشت روی این فضاهای سوبولوف، در واقع پیوسته هم هست.

قضیه ۷.۵. نگاشت $[\varphi]_+ \mapsto \varphi$ بر روی فضای H^s پیوسته است اگر $s \leq 1$ باشد.

اثبات. در اینجا ابتدا اثبات را در حالت $s = 1$ بیان می کنیم. فرض کنید $\varphi \in H^1(X)$. پس φ تابعی پیوسته است و لذا مجموعه $\{\varphi > 0\}$ اجتماع حداکثر شمارا بازه به نام (a_i, b_i) است به طوری که φ در دو سر این بازه ها برابر صفر است. به آسانی به کمک توابع آزمون# دیده می شود که مشتق ضعیف $[\varphi]_+$ وجود دارد و برابر است با $\partial_x \varphi \mathbf{1}_{\{\varphi > 0\}}$. این تابع به وضوح مجذور انتگرال پذیر دارد. به طور مشابه، $\partial_x [\varphi]_- = -\partial_x \varphi \mathbf{1}_{\{\varphi < 0\}}$ از اینجا نتیجه می گیریم که،

$$\partial_x \varphi \mathbf{1}_{\{\varphi = 0\}} = \partial_x \varphi - \partial_x [\varphi]_+ + \partial_x [\varphi]_- = \partial_x \varphi - \partial_x ([\varphi]_+ - [\varphi]_-) = 0.$$

اکنون فرض کنید دنباله توابع $\{\varphi_k\}_k$ در H^1 به سمت تابع φ همگرا باشد و فرض کنید $\varepsilon > 0$ دلخواه است. چون $\{\varphi = 0\} = \bigcap \{|\varphi| < 1/m\}$ و $\partial_x \varphi \mathbf{1}_{\{\varphi = 0\}} = 0$ و $\partial_x \varphi \in L^1$ ، لذا قضیه تسلطی لبگ† نتیجه می دهد که $\int_X |\partial_x \varphi| \mathbf{1}_{\{|\varphi| < 1/m\}} \rightarrow 0$ وقتی $m \rightarrow \infty$. پس می توانیم $\delta > 0$ را به گونه ای انتخاب کنیم که $\int_X |\partial_x \varphi| \mathbf{1}_{\{|\varphi| < \delta\}} < \varepsilon$ باشد. برای k به اندازه کافی بزرگ، $\|\varphi_k - \varphi\|_\infty < \delta$ و $\int_X |\partial_x \varphi_k - \partial_x \varphi|^2 < \varepsilon$ است که اثبات را کامل می کند زیرا روی مجموعه $\{|\varphi| \geq \delta\}$ φ و φ_k هم علامت هستند و روی مجموعه $\{|\varphi| < \delta\}$ هر دوی $\|\partial_x \varphi_k - \partial_x \varphi\|_2$ و $\|\partial_x \varphi_k + \partial_x \varphi\|_2$ کنترل می شوند. برای حالت $0 < s < 1$ ، از یک تعریف معادل نُرم فضای H^s استفاده می کنیم،

$$\|\phi\|_{H^s}^2 = \|\phi\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|^2}{|x - y|^{1+2s}} dx dy.$$

*Truncation Map

#Test Functions

†Lesbesgue's Dominated Convergence Theorem

برای نمونه به [۱] مراجعه کنید. اکنون فرض کنید $\phi \rightarrow \phi_k$ در H^s و به برهان خلف فرض کنید $f_k = [\phi_k]_+ - [\phi]_+$ در H^s به صفر همگرا نباشد. با گذر به یک زیردنباله می‌توان فرض کرد $\|f_k\|_{H^s} \geq \epsilon > 0$ و همچنین $\phi_k - \phi$ تقریباً همه‌جا به صفر همگرا باشد. با توجه به اینکه برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم،

$$\begin{aligned} |f_k(x) - f_k(y)| &\leq 2(|[\phi_k(x)]_+ - [\phi_k(y)]_+| + |[\phi(x)]_+ - [\phi(y)]_+|) \\ &\leq 2(|\phi_k(x) - \phi_k(y)| + |\phi(x) - \phi(y)|). \end{aligned}$$

قرار دهید $d\mu = |x - y|^{-(1+2s)} dx dy$. از $\|\phi_k - \phi\|_{H^s} \rightarrow 0$ و تعریف اخیر نرم فضای H^s خواهیم داشت $\phi_k(x) - \phi_k(y) \rightarrow \phi(x) - \phi(y)$ در $L^2(d\mu)$. پس باز هم با گذر به یک زیردنباله، می‌توان توابع $\phi_k(x) - \phi_k(y)$ را تحت تسلط یک تابع G در $L^2(d\mu)$ در آورد. بنابراین می‌توانیم قضیه همگرایی تسلطی لبگ را برای دنباله $\{f_k(x) - f_k(y)\}_k$ به کار ببریم و نتیجه بگیریم که این دنباله در فضای $L^2(d\mu)$ به صفر همگراست. به عبارت دیگر $\|f_k\|_{H^s} \rightarrow 0$ که تناقض است. \square

تذکره ۸.۵. نتیجه بیان شده در این لم، در تمامی ابعاد درست است و وابسته به بُعد ۱ نیست. اثبات این مطلب دقیقاً به همین شکل است.

تذکره ۹.۵. نگاشت بُرش روی فضای H^s به طور موضعی لیبشیتز* نیست. برای مشاهده این مطلب، فرض کنید $\varphi \in H^s$ روی بازه (x_0, x_1) برابر صفر باشد. تابع $\psi \in H^s$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\psi(x) = \frac{x - x_0}{x'_0 - x_0} \mathbf{1}_{(x_0, x'_0)} + \mathbf{1}_{[x'_0, x'_1]} + \frac{x_1 - x}{x_1 - x'_1} \mathbf{1}_{(x'_1, x_1)},$$

که (x'_0, x'_1) زیربازه‌ای از (x_0, x_1) است. قرار دهید $\psi_k(x) = k^{-\gamma} \psi(x)$. اکنون توابع زیر را بررسی می‌کنیم،

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \varphi(x) + \left(1 + \cos 2\pi k \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) \psi_k(x), \\ g_k(x) &= \varphi(x) + \left(-1 + \cos 2\pi k \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) \psi_k(x). \end{aligned}$$

داریم $f_k \geq 0$ و $g_k \leq 0$ و لذا،

$$\|[f_k]_+ - [g_k]_+\|_{H^s} = \|f_k\|_{H^s} \gtrsim k^{-\gamma+s-1/2},$$

که این نامساوی آخر به کمک تخمین هولدر# (۷.۵) به دست آمده است. اما،

$$\|f_k - g_k\|_{H^s} = 2\|\psi_k\|_{H^s} = 2\|\psi\|_{H^s} k^{-\gamma}.$$

می‌توانیم γ را آن قدر بزرگ انتخاب کنیم که $\|f_k - \varphi\|_{H^s} + \|g_k - \varphi\|_{H^s} \rightarrow 0$. در واقع کافی است که $\gamma > s - 1/2$ انتخاب کنیم. تا اینجا نشان داده‌ایم که نگاشت بُرش، حول φ لیبشیتز نیست و لذا حول بستار† این گونه توابع در H^s هم لیبشیتز نیست. می‌توان دید که هر تابعی که در یک نقطه صفر شود، در این بستار قرار دارد.

*Locally Lipschitz

#Hölder Estimate

†Closure

۶ تبدیل فوریه و هیلبرت گسسته

در این فصل، به معرفی تبدیل فوریه و هیلبرت گسسته و اثبات برخی خواص آن خواهیم پرداخت. این تبدیل کاربردهای فراوانی به خصوص در پردازش سیگنال‌های الکتریکی دارد. در اینجا ما خواص همگرایی این تبدیل را به صورت دقیق و منظم بیان و اثبات می‌کنیم.

۶-۱ تعاریف و مقدمات

در این بخش به تعریف تبدیل فوریه و هیلبرت گسسته می‌پردازیم و خواص مقدماتی آنها را بیان می‌کنیم. ایده تبدیل فوریه گسسته در واقع این است که تبدیل فوریه یک تابع را که روی دایره (یک بازه متناوب) تعریف شده است، به صورت عددی بیان و محاسبه کنیم. این تبدیل برای این منظور از نمونه مقادیر تابع مورد نظر روی تعدادی از نقاط بازه استفاده می‌کند. اگرچه تبدیل فوریه گسسته به صورت کلی برای هر تعداد نمونه‌برداری تعریف می‌شود، برای گریز از پیچیدگی نمادگذاری‌ها در اثبات‌های ارائه‌شده، خود را به حالتی که در آن تعداد نمونه‌ها فرد است محدود می‌کنیم. لازم به ذکر است که به سادگی می‌توان تمامی اثبات‌ها را با اندکی تغییر برای حالت زوج هم نوشت.

تعریف ۱.۶ (تبدیل فوریه گسسته). برای بردار $b = (b_{-k}, \dots, b_k)$ از اعداد مختلط، تبدیل فوریه گسسته* این بردار (که آن را با $\beta = \mathcal{F}_d b$ نمایش می‌دهیم) به صورت زیر معرفی می‌شود،

$$\beta_j = (\mathcal{F}_d b)_j = \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \sum_{|m| \leq k} b_m e^{-\sqrt{2}\pi i m j / (2k+1)}, \quad |j| \leq k. \quad (1.6)$$

به آسانی می‌توان دید که تبدیل فوریه معکوس گسسته به صورت زیر قابل بیان است،

$$b_m = (\mathcal{F}_d^{-1} \beta)_m = \sum_{|j| \leq k} \beta_j e^{\sqrt{2}\pi i j m / (2k+1)}, \quad |m| \leq k.$$

در واقع تبدیل فوریه گسسته، تلاشی برای درون‌یابی مقادیر مشاهده‌شده یا نمونه‌برداری شده b_m به کمک توابع متناوب است.

*Discrete Fourier Transform (DFT)

تعریف ۲.۶. فضای E_k را به عنوان زیرفضایی خطی از فضای $H^s(\mathbb{S}^1)$ یا $L^1(\mathbb{S}^1)$ که توسط مجموعه توابع $\{e^{\imath\pi jx}; |j| \leq k\}$ تولید می‌شود، تعریف می‌کنیم.

می‌توان به بردار b به عنوان یک نمایش* از تابع

$$\tilde{b}(x) = \sum_{|j| \leq k} \beta_j e^{\imath\pi jx} \in E_k,$$

نگریست. از این منظر، بردار $\{b_m\}_m$ عملاً مقادیر نمونه‌برداری شده تابع \tilde{b} در نقاط $x_m = mh$ برای $|m| \leq k$ است که در آن،

$$h = (2k + 1)^{-1},$$

قدم‌های گسسته‌سازی متغیر مکان است. در ضمن،

$$\mathcal{F}\tilde{b}(j) = (\mathcal{F}_d b)_j, \quad |j| \leq k.$$

تبدیل فوریه گسسته این امکان را فراهم می‌کند که بتوان عمل‌گرهایی را که تعریف آن‌ها بر پایه تبدیل فوریه قابل بیان است، به حالت گسسته نیز تعمیم داد. در واقع در اینجا به دو عمل‌گر این چنین نیازمندیم. اولی عمل‌گر انتقال است که می‌توان شکل گسسته آن را به صورت زیر بیان کرد،

$$\mathcal{S}_y b = \mathcal{F}_d^{-1}(e^{-\imath\pi j y} \mathcal{F}_d b). \quad (۲.۶)$$

در اینجا برای جلوگیری از پیچیده شدن نمادگذاری، نسخه گسسته این عمل‌گر را هم با همان \mathcal{S}_y نمایش می‌دهیم. این تعریف با تعریف این عمل‌گر در حالت پیوسته سازگار است، به این معنی که،

$$\widetilde{\mathcal{S}_y b} = \mathcal{S}_y \tilde{b}.$$

همچنین در حالت خاصی که این انتقال به اندازه مضرب صحیحی از h باشد، خواهیم داشت،

$$(\mathcal{S}_{zh} b)_m = b_{m-z},$$

که $m - z$ به پیمانۀ $2k + 1$ محاسبه می‌شود.

دومین عمل‌گر مورد نظر، تبدیل هیلبرت یا نسخه تعمیم‌یافته آن است. این عمل‌گر را در حالت گسسته می‌توان به صورت زیر تعریف نمود،

$$\mathcal{H}b = \mathcal{F}_d^{-1}\left(\frac{-\imath\pi j}{\alpha + \imath\pi|j|} \mathcal{F}_d b\right), \quad (۳.۶)$$

*Representation

به طوری که سازگار با تعریف معمولی حالت پیوسته باشد، یعنی $\widetilde{\mathcal{H}b} = \mathcal{H}\widetilde{b}$. در حالت تبدیل هیلبرت معمولی، یعنی $\alpha = 0$ ، محاسبات مستقیم، ما را به نتیجه زیر می‌رساند،

$$\mathbb{H}\widetilde{b}(x) = \sum_{|m| \leq k} b_m \Lambda_h(x - x_m), \quad \Lambda_h(x) = \frac{\cos(\pi x) - \cos(h^{-1}\pi x)}{\sin(\pi x)}.$$

به معادله فوق می‌توان از منظر دیگری هم نگریست. نتیجه این معادله این است که مقدار محاسبه شده در نقطه $x_{m+1/2}$ برای $\mathbb{H}\widetilde{b}$ در واقع مقدار عددی محاسبه شده برای پیچش* تابع \widetilde{b} و هسته تبدیل هیلبرت یعنی $\cot \pi x$ است که به کمک مقادیر این دو تابع در نقاط x_m محاسبه شده است. علت انتخاب نقاط میانی، فرار و گریز از تکینگی# هسته تبدیل هیلبرت در نقطه صفر است. بعد از محاسبه این مقادیر، $\mathbb{H}\widetilde{b}$ درون‌یابی این مقادیر با استفاده از عناصر فضای E_k است.

۶-۲ همگرایی تبدیل فوریه گسسته

در ادامه می‌خواهیم میزان دقت تخمین توابع به کمک این تبدیل را به دست آوریم. ایده را بر این بنا می‌گذاریم که برای تابع $f \in H^1$ ، این تابع را به وسیله مقادیر آن در نقاط x_m با عنصری از فضای E_k درون‌یابی کنیم. در واقع فرمول تبدیل فوریه گسسته معکوس در این نقطه به کمک می‌آید تا ضرایب بسط تابع درون‌یابی شده را بر حسب پایه $\{e^{2\pi i j x}\}_{|j| \leq k}$ به دست آوریم.

تعریف ۳.۶. نگاشت تصویر $\mathbb{P}_k: H^1 \rightarrow E_k$ را به این صورت معرفی می‌کنیم: بردار $b(f)$ را به کمک $b(f)_m = f(x_m)$ تعریف می‌کنیم و قرار می‌دهیم،

$$\mathbb{P}_k f = \widetilde{b(f)}.$$

با در نظر داشتن تعریف تبدیل فوریه گسسته، می‌توان این نگاشت تصویر را به صورت صریح زیر بیان کرد،

$$\mathbb{P}_k f(x) = h \sum_{|m| \leq k} f(x_m) K_h(x - x_m),$$

که در آن K_h در اصطلاح هسته دیریشله† نامیده می‌شود و

$$K_h(x) = \sum_{|j| \leq k} e^{2\pi i j x} = \frac{\sin(h^{-1}\pi x)}{\sin(\pi x)}.$$

انتگرال این هسته برابر یک است و لذا،

$$\int_{\mathbb{S}^1} \mathbb{P}_k f(x) dx = h \sum_{|m| \leq k} f(x_m).$$

* Convolution

Singularity

† Dirichlet Kernel

همچنین مجموعه توابع $\{K_h(x - x_m); |m| \leq k\}$ یک پایه متعامد در L^2 برای فضای E_k است که اندازه آنها برابر است با $h^{-1/2}$. بنابراین،

$$\|\mathbb{P}_k f\|_2^2 = h \sum_{|m| \leq k} |f(x_m)|^2. \quad (4.6)$$

در واقع تا اینجا مشاهده کردیم که برای محاسبه انتگرال و یا نرم مربعی تابع درون‌یابی شده، می‌توان از مقادیر نمونه‌برداری شده، به صورت طبیعی استفاده نمود.

اکنون به بررسی تقریب مشتق می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا دقت می‌کنیم که اگرچه عملگر \mathbb{P}_k در حالت کلی با عملگر انتقال جابه‌جا نمی‌شود، ولی با انتقال به اندازه h جابه‌جا می‌شود. نتیجه این است که،

$$\begin{aligned} \|\Delta_h \mathbb{P}_k f\|_2^2 &= \|\mathbb{P}_k \Delta_h f\|_2^2 = h \sum_{|m| \leq k} \left(\frac{f(x_{m+1}) - f(x_m)}{h} \right)^2 = h^{-1} \sum_{|m| \leq k} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} \partial_x f \right)^2 \\ &\leq \sum_{|m| \leq k} \int_{x_m}^{x_{m+1}} |\partial_x f|^2, \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $x_{m+1} - x_m = h$. پس داریم،

$$\|\Delta_h \mathbb{P}_k f\|_2 \leq \|\partial_x f\|_2.$$

از سوی دیگر، اگر نمایش زیر را در نظر بگیریم،

$$\mathbb{P}_k f = \sum_{|j| \leq k} \beta(f)_j e^{i\pi j x} \in E_k,$$

در این صورت خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} \|\partial_x \mathbb{P}_k f\|_2^2 &= \sum_{|j| \leq k} \pi^2 j^2 |\beta(f)_j|^2 \\ &\leq \left(\sup_{|j| \leq k} \frac{\pi^2 h^2 j^2}{\sin^2(\pi h j)} \right) \sum_{|j| \leq k} \frac{\sin^2(\pi h j)}{h^2} |\beta(f)_j|^2 \\ &= \left(\sup_{|x| \leq \frac{1}{2}} \frac{\pi x}{\sin \pi x} \right)^2 \sum_{|j| \leq k} \left| \frac{e^{i\pi h j} - 1}{h} \beta(f)_j \right|^2 \\ &\leq \frac{\pi^2}{4} \|\Delta_h \mathbb{P}_k f\|_2^2. \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\|\partial_x \mathbb{P}_k f\|_2 \leq \frac{\pi}{4} \|\partial_x f\|_2. \quad (5.6)$$

لذا عملگر تصویر \mathbb{P}_k روی H^1 پیوسته است. اکنون با توجه به اینکه $f - \mathbb{P}_k f$ در نقاط نمونه برداری یعنی x_m برابر صفر است، نامساوی پوانکاره* روی بازه‌های (x_m, x_{m+1}) نتیجه می‌دهد،

$$\|f - \mathbb{P}_k f\|_2 \leq \frac{h}{\sqrt{\pi}} \|\partial_x(f - \mathbb{P}_k f)\|_2. \quad (۶.۶)$$

این نامساوی‌ها برای کاربردهایی که در این رساله احتیاج داریم کافی است، به شرط اینکه نشان دهیم $\|f - \mathbb{P}_k f\|_{H^1} \rightarrow 0$. برای اثبات این مطلب، دقت کنید که با توجه به اینکه دنباله $\mathcal{F}f$ به صورت مطلق جمع پذیر# است، خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} \beta(f)_j &= h \sum_{|m| \leq k} f(x_m) e^{-2\pi i j x_m} \\ &= h \sum_{|m| \leq k} \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}f(\ell) e^{2\pi i \ell x_m} \right) e^{-2\pi i j x_m} \\ &= h \sum_{|m| \leq k} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}f(\ell) e^{2\pi i (\ell - j) x_m} \\ &= h \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}f(\ell) \sum_{|m| \leq k} e^{2\pi i (\ell - j) x_m}, \end{aligned}$$

و جمع روی m برابر صفر است، مگر در حالتی که $\ell \equiv j \pmod{2k+1}$. بنابراین،

$$\beta(f)_j = \mathcal{F}\mathbb{P}_k f(j) = \sum_{\substack{\ell \in \mathbb{Z} \\ \ell \equiv j}} \mathcal{F}f(\ell), \quad |j| \leq k.$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم،

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \|\partial_x(f - \mathbb{P}_k f)\|_2^2 = \sum_{|j| \leq k} j^2 \left| \sum_{\substack{\ell \equiv j \\ \ell \neq j}} \mathcal{F}f(\ell) \right|^2 + \sum_{|j| > k} j^2 |\mathcal{F}f(j)|^2.$$

عبارت اول را می‌توان به صورت زیر تخمین زد،

$$\begin{aligned} \sum_{|j| \leq k} j^2 \left| \sum_{\substack{\ell \equiv j \\ \ell \neq j}} \mathcal{F}f(\ell) \right|^2 &\leq \sum_{|j| \leq k} j^2 \left(\sum_{\substack{\ell \equiv j \\ \ell \neq j}} \frac{1}{\ell^2} \right) \left(\sum_{\substack{\ell \equiv j \\ \ell \neq j}} \ell^2 |\mathcal{F}f(\ell)|^2 \right) \\ &\leq \left(\sup_{|j| \leq k} \sum_{\substack{\ell \equiv j \\ \ell \neq j}} \frac{j^2}{\ell^2} \right) \sum_{|j| \leq k} \sum_{\substack{\ell \equiv j \\ \ell \neq j}} \ell^2 |\mathcal{F}f(\ell)|^2 \\ &\leq \left(\sup_{|j| \leq k} \sum_{\ell \neq 0} \left(\frac{j}{h^{-1}\ell + j} \right)^2 \right) \sum_{|\ell| > k} \ell^2 |\mathcal{F}f(\ell)|^2. \end{aligned}$$

*Poincaré Inequality

#Absolutely Summable

از سوی دیگر با توجه به اینکه $h^{-1}j^{-1} < 2$ است، خواهیم داشت،

$$\sum_{\ell \neq 0} \left(\frac{1}{h^{-1}j^{-1}\ell + 1} \right)^2 < \sum_{\ell \neq 0} \frac{1}{(2|\ell| - 1)^2} = \frac{\pi^2}{4},$$

و لذا،

$$\|\partial_x(f - \mathbb{P}_k f)\|_2 \rightarrow 0.$$

در اینجا قابل ذکر است که در حالتی که $s \geq 1, f \in H^s$ خواهیم داشت،

$$\|\partial_x(f - \mathbb{P}_k f)\|_2 = o(k^{1-s}).$$

تذکر ۴.۶. اگرچه اینجا برای سادگی، اثبات‌ها در حالت $h = 1/(2k + 1)$ بیان شده‌اند، با توجه به اینکه الگوریتم محاسبه FFT برای توان‌های ۲ سریع‌تر است، در عمل ما $h = 2^{-k}$ انتخاب می‌کنیم. لازم به ذکر است که تمام اثبات‌ها با تغییرات جزئی برای حالت مورد نظر که تعداد نقاط گسسته‌سازی زوج باشد، نوشته می‌شود.

۷ معادله جنبشی سلول‌ها

در این فصل، ابتدا یک سیستم کلاسیک جنبشی برای تاکتیسیم شیمیایی را معرفی می‌کنیم و خواص آن را در فضای دو بعدی بیان می‌کنیم. سپس مشابه مدل ماکروسکوپی، تصحیحی روی این مدل انجام می‌دهیم تا در بُعد ۱ هم رفتار مناسبی داشته باشد. سپس با نمادگذاری‌های مناسب، معادلات را بازنویسی می‌کنیم تا در ادامه به تحلیل آن‌ها بپردازیم.

۷-۱ معرفی دستگاه معادلات جنبشی

در این بخش به معرفی یک مدل جنبشی* برای حرکت سلول‌ها تحت اثر ماده شیمیایی می‌پردازیم. تفاوت یک مدل جنبشی با یک مدل ماکروسکوپی در این است که نسبت به مدل‌های ماکروسکوپی، یک درجه به نگاه به ذرات دقیق‌تر می‌شود. در واقع در یک مدل ماکروسکوپی، معادلات فقط برای چگالی ذرات نوشته می‌شود، اما در یک مدل جنبشی، سرعت ذرات نیز وارد معادلات خواهد شد. بنابراین صورت‌بندی معادلات بر اساس تابع مجهول $f(t, x, v)$ خواهد بود که $x \in X \subset \mathbb{R}^d$ و $v \in V \subset \mathbb{R}^d$. این تابع نشان‌دهنده چگالی ذراتی است که در حال حرکت با سرعت v در لحظه t هستند. محیط X می‌تواند تمامی فضای \mathbb{R}^d و یا زیرمجموعه‌ای کران‌دار از آن باشد. در اینجا به حالت محیط متناوب یک بعدی هم علاقه‌مند هستیم، یعنی $X = \mathbb{S}^1$. مجموعه سرعت‌های مجاز[#]، V ، در هر حال کران‌دار است. این مجموعه می‌تواند یک زیرمجموعه باز کران‌دار یا یک مجموعه متناهی باشد. در حالت کلی، چگالی نقطه‌ای ذرات که آن را با n نمایش می‌دهیم، به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$n(t, x) = \int_{v \in V} f(t, x, v) dv. \quad (1.7)$$

در حالت V متناهی، در واقع انتگرال بالا به جمع تبدیل می‌شود. یکی از مدل‌های شناخته شده و طبیعی برای حرکت ذرات، «فرآیند پرش‌های سرعت»[†] است. دوباره مثال حرکت باکتری *Escherichia coli* را که در مقدمه اشاره کردیم، یادآوری می‌کنیم. همانطور که بیان شد، این باکتری دو نوع حرکت اصلی دارد که یکی حرکت در یک امتداد ثابت است و به «پیمایش» مشهور است. یکی هم «چرخش» است که در طی آن در عمل فقط مسیر حرکت باکتری عوض می‌شود و زمان این نوع

*Kinetic Model

#Admissible Set of Velocities

†Velocity-Jump Process

حرکت هم در مقایسه با پیمایش، بسیار کوتاه است. از روی این مثال واقعی، فرضیات را به شکلی که در ادامه می‌آید در نظر می‌گیریم.

در حالت ساده فرآیند پرش‌های سرعت، تصور می‌کنیم که ذرات در حال حرکت با سرعت ثابت هستند، و مطابق با یک فرآیند پواسون*، در لحظاتی تصمیم می‌گیرند که سرعت خود را اصلاح کنند و فرض می‌کنیم که این اصلاح سرعت، به صورت آنی انجام می‌شود و زمانی در آن تلف نمی‌شود و تدریجی هم نیست. این اصلاح در حالت پاسخ مثبت به محرک شیمیایی به این معنی است که ذرات متمایل هستند که سرعت خود را در راستای شیب[‡] چگالی محرک تغییر دهند و در حالت پاسخ منفی، برعکس. یکی از مدل‌های شناخته‌شده و پذیرفته‌شده که بر اساس این فرآیند بنا می‌شود، مدل «اوتمر-دونبار-آلت»[†] [۳۴] است که به معادله ترابری زیر منجر می‌شود،

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = -\lambda_S(t, x, v) f(t, x, v) + \int_{v' \in V} T_S(t, x, v' \mapsto v) f(t, x, v') dv', \quad (2.7)$$

$$f(\circ, x, v) = f_\circ(x, v).$$

نگاشت $T_S(t, x, v' \mapsto v)$ که به «هسته چرخش»[‡] معروف است، نشان‌دهنده احتمال تغییر سرعت از v' به v است و

$$\lambda_S(t, x, v) = \int_{v' \in V} T_S(t, x, v \mapsto v') dv',$$

شدت[‡] یا نرخ این فرآیند پواسون است. تأثیر چگالی ماده شیمیایی، S ، بر روی این احتمال تغییر سرعت‌ها، در نمادگذاری T_S برجسته شده است. اگر محیط X کران‌دار باشد، بایستی شرط مرزی مناسبی هم داشته باشیم. طبیعی‌ترین شرط مرزی، شرط جریان صفر روی مرز است که با توجه به اینکه جریان حرکت ذرات به صورت زیر است،

$$j(t, x) = \int_{v \in V} v f(t, x, v) dv,$$

این شرط مرزی، شکل زیر را دارد،

$$\eta(x) \cdot j(t, x) = \int_{v \in V} \eta(x) \cdot v f(t, x, v) dv = 0, \quad x \in \partial X.$$

دقت کنید که بدون ملاحظه دقت ریاضی در وجود انتگرال‌ها، در این معادله جرم کل ذرات در طول زمان

*Poisson Process ‡Gradient †Othmer–Dunbar–Alt System ‡Turning Kernel †Intensity

ثابت می‌ماند،

$$\begin{aligned} \partial_t n(t, x) &= \partial_t \int_{v \in V} f(t, x, v) dv = \int_{v \in V} \partial_t f(t, x, v) dv \\ &= \int_{v \in V} -v \cdot \nabla_x f(t, x, v) \\ &\quad - \int_{v \in V} \lambda_S(t, x, v) f(t, x, v) + \int_{v \in V} \int_{v' \in V} T_S(t, x, v' \mapsto v) f(t, x, v') dv' \\ &= -\nabla \cdot j(t, x), \end{aligned}$$

و لذا با انتگرال‌گیری نسبت به متغیر مکان و استفاده از شرط مرزی در صورت لزوم داریم،

$$\partial_t \int_X n(t, x) dx = \int_X -\nabla \cdot j(t, x) = 0.$$

در ادامه به بررسی این مدل در حالت زیر می‌پردازیم،

$$T_S(t, x, v' \mapsto v) = \chi [v \cdot \nabla S(t, x)]_+, \quad (3.7)$$

که ثابت $\chi > 0$ حساسیت شیمیایی* را نشان می‌دهد. (البته در حالت کلی‌تر، χ می‌تواند تابعی از زمان و مکان و S باشد، اما در اینجا فرض می‌کنیم که مقدار χ ، عددی ثابت و مثبت است). این انتخاب به این معنی است که سلول‌ها در لحظه چرخش و اصلاح سرعت، توجهی به راستای قبلی حرکت خود ندارند و با احتمالی که به زاویه سرعت با گرادیان چگالی ماده شیمیایی متناسب است، سرعت جدیدی اختیار می‌کنند. دیگر انتخاب‌های ممکن برای هسته چرخش را می‌توان در مراجع [۶، ۱۸، ۳۴، ۳۵] دنبال کرد. برای تکمیل این معادلات، بایستی معادله تحول ماده محرک شیمیایی را هم در این مدل وارد کنیم. همانند قبل، می‌توانیم معادله بیضوی،

$$-\Delta S + \alpha S = n, \quad (4.7)$$

را انتخاب کنیم که به آن معنی است که ماده شیمیایی، سرعت پخشی بسیار بیشتر از سلول‌ها دارد و توسط خود سلول‌ها تولید و ترشح می‌شود. همچنین این ماده شیمیایی با باقی ماندن در محیط، در طول زمان از بین خواهد رفت. مثلا ممکن است به ماده دیگری تبدیل شود یا تبخیر شود.

دستگاه معادلات بر اساس (۲.۷) و (۳.۷) و (۴.۷) در حالتی که داده اولیه متقارن باشد، به خوبی در بُعد ۲ بررسی شده است. در [۵]، قضایای نسبتا کاملی برای این مسأله اثبات شده است که مختصرا در اینجا به آنها اشاره می‌کنیم. ابتدا بایستی اشاره کنیم که منظور از تقارن داده اولیه این است که برای هر تبدیل متعامد T روی \mathbb{R}^2 داریم، $f_*(Tx, Tv) = f_*(x, v)$. به سادگی می‌توان از روی معادلات دید که این تقارن اولیه، با فرض وجود جواب، در طول زمان حفظ خواهد شد. مشابه مدل ماکروسکوپی، ثابت شده است که

*Chemotactic Sensitivity

اگر جرم اولیه از حدی کمتر باشد، در این صورت با فرض اینکه داده اولیه در فضای $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2 \times V)$ و تحت تسلط تابعی به شکل $k|x|^{-\gamma}$ باشد که $0 < \gamma < 1$ ، جواب سراسری برای دستگاه معادلات به دست می‌آید. همچنین اگر جرم اولیه از حدی بیشتر باشد (که لزوماً با مقدار قبلی یکی نیست)، در این صورت جواب دستگاه معادلات، در زمان متناهی به انفجار می‌رسد.

در اینجا بایستی به یک نکته جالب نیز اشاره کنیم. قضایای فوق در حالتی که مجموعه سرعت‌های مجاز به شکل $V = B(\circ, R)$ است، اثبات شده‌اند. اما همین نتایج با انتخاب مجموعه سرعت‌ها به صورت $V = S(\circ, R) = \partial B(\circ, R)$ نیز درست هستند. این نکته یک حقیقت جالب را در پی دارد: برخلاف آنچه که ممکن است در نگاه اول به نظر برسد، سرعت ذرات در نزدیکی نقطه تجمع، به سمت صفر میل نمی‌کند، بلکه به بیشترین میزان ممکن می‌رسد. علت اینکه ذرات از نقطه تجمع فرار نمی‌کنند، کم شدن سرعت آنها نیست، بلکه علت این است که در نزدیکی نقطه تجمع، با نرخ بسیار بالایی تغییر سرعت خواهند داد. اکنون به بُعد ۱ باز می‌گردیم. با انتخاب (۳.۷) برای هسته چرخش، معادله (۲.۷) در بُعد ۱ به صورت زیر بازنویسی می‌شود،

$$\partial_t f + v \partial_x f = \chi [v \partial_x S(t, x)]_+ n(t, x) - \chi f(t, x, v) \int_{v' \in V} [v' \partial_x S(t, x)]_+ dv'.$$

همانند قبل، به جای معادله بیضوی (۴.۷)، نسخه تصحیح‌شده زیر را انتخاب می‌کنیم [۳۷]،

$$(-\Delta)^{\frac{1}{2}} S + \alpha S = n,$$

که به معنای در نظر گرفتن پخش کسری برای ماده شیمیایی است. در اینجا به جمع‌بندی مدلی که آن را مطالعه خواهیم کرد، می‌پردازیم. معادلات را در یک محیط یک بعدی در نظر خواهیم گرفت، یعنی $X = \mathbb{R}$ و یا $X = \mathbb{S}^1$ که نشان‌دهنده یک محیط متناوب است. همچنین فرض می‌کنیم که مجموعه سرعت‌های مجاز، V ، متناهی است، اگرچه در تذکر ۷.۸ خواهیم دید که حالتی که V یک بازه از اعداد حقیقی باشد نیز تفاوت جدی با حالت متناهی ندارد. قرار می‌دهیم،

$$\mu_+ = \sum_{v > \circ} v, \quad \mu_- = - \sum_{v < \circ} v. \quad (5.7)$$

به کمک این تعریف، به دستگاه معادلات زیر خواهیم رسید،

$$\begin{aligned} \partial_t f + v \partial_x f &= [v \partial_x S]_+ n - (\mu_+ [\partial_x S]_+ + \mu_- [\partial_x S]_-) f, \\ (-\Delta)^{\frac{1}{2}} S + \alpha S &= n, \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$f(\circ, x, v) = f_\circ(x, v).$$

توجه کنید که در این معادلات، پارامتر χ را برابر با یک گرفته‌ایم زیرا با ضرب کردن همه چگالی‌ها در χ بدون کاسته شدن از کلیت، می‌توان فرض کرد که $\chi = 1$.

در اینجا از تعریف ۲.۱ استفاده می‌کنیم تا دومین معادله از دستگاه معادلات بالا را به صورت زیر بنویسیم،

$$\partial_x S = -\mathcal{H}n.$$

لذا دستگاه معادلات (۶.۷) به معادله زیر خلاصه می‌شود،

$$\begin{aligned} \partial_t f + v \partial_x f &= [v\mathcal{H}n]_- n - (\mu_+[\mathcal{H}n]_- + \mu_-[\mathcal{H}n]_+) f, \\ f(\circ, x, v) &= f_\circ(x, v). \end{aligned} \quad (۷.۷)$$

در ادامه به دنبال اثبات یک قضیه وجود و یکتایی برای معادله (۷.۷) هستیم. برای این منظور ابتدا فضای مناسب برای حل این معادله را پیدا می‌کنیم.

۷-۲ نمادگذاریها

در اینجا نمادگذاریهایی را معرفی می‌کنیم که در فصل بعدی، برای اثبات وجود و یکتایی جواب معادله (۷.۷) از آنها استفاده خواهیم کرد.

عبارت X می‌تواند تمامی فضای \mathbb{R} و یا دایره \mathbb{S}^1 باشد. با به یاد آوردن تعریف فضای سوپرفرکسری، فضاهای زیر را معرفی می‌کنیم.

قرارداد ۱.۷. برای $\frac{1}{4} < s \leq 1$ که در طول متن ثابت خواهد بود، تعریف می‌کنیم $H = L^1(V; H^s)$. در واقع H با ضرب $\text{card}(V)$ مرتبه فضای H^s ، یکریخت است و اگر \mathbf{f}_v نمایانگر مؤلفه متناظر $v \in V$ از $\mathbf{f} \in H$ باشد، آنگاه این فضا مجهز به نرم زیر است،

$$\|\mathbf{f}\|_H = \sum_{v \in V} \|\mathbf{f}_v\|_{H^s}.$$

فضای $L = L^1(V; L^1)$ را به طریق مشابه تعریف می‌کنیم.

قرارداد ۲.۷. قسمت غیر خطی معادله (۷.۷) را به \mathbf{N} نمایش می‌دهیم. یعنی،

$$(\mathbf{N}\mathbf{f})_v = [v\mathcal{H}n]_- n - (\mu_+[\mathcal{H}n]_- + \mu_-[\mathcal{H}n]_+) \mathbf{f}_v, \quad (۸.۷)$$

که در این تعریف $n = \sum_{v \in V} \mathbf{f}_v$ است.

قضیه ۳.۷. با توجه به تعریف (۸.۷)، عملگر \mathbf{N} روی فضای H عمل می‌کند و تخمین‌های زیر برقرار است،

$$\begin{aligned} \|\mathbf{N}\mathbf{f}\|_H &\lesssim \|\mathbf{f}\|_H^2, \\ \|\mathbf{N}\mathbf{f}_1 - \mathbf{N}\mathbf{f}_2\|_L &\lesssim (\|\mathcal{H}n_1\|_\infty + \|\mathbf{f}_1\|_\infty + \|\mathcal{H}n_2\|_\infty + \|\mathbf{f}_2\|_\infty) \|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|_L, \\ \|\mathbf{N}\mathbf{f}_1 - \mathbf{N}\mathbf{f}_2\|_L &\lesssim (\|\mathbf{f}_1\|_H + \|\mathbf{f}_2\|_H) \|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|_L. \end{aligned}$$

اثبات. ابزارهای لازم، در فصل ۵ بیان و اثبات شده‌اند. اگر $\mathbf{f} \in H$ باشد، پس $n \in H^s(X)$ خواهد بود و لذا $\mathcal{H}n \in H^s(X)$. با توجه به اینکه $1 \leq s < \frac{1}{\nu}$ است و با استفاده از قضیه ۷.۵ و لم ۶.۵، نتیجه می‌گیریم که $\mathbf{Nf} \in H$. اکنون داریم،

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{Nf})_v\|_{H^s} &\leq \| [v\mathcal{H}n]_- n \|_{H^s} + \| (\mu_+ [\mathcal{H}n]_- + \mu_- [\mathcal{H}n]_+) \mathbf{f}_v \|_{H^s} \\ &\lesssim \| [v\mathcal{H}n]_- \|_{H^s} \| n \|_{H^s} + \| \mu_+ [\mathcal{H}n]_- + \mu_- [\mathcal{H}n]_+ \|_{H^s} \| \mathbf{f}_v \|_{H^s} \\ &\leq |v| \| n \|_{H^s}^\nu + (\mu_+ + \mu_-) \| n \|_{H^s} \| \mathbf{f}_v \|_{H^s}, \end{aligned}$$

که نابرابری اول را نتیجه می‌دهد زیرا $\| \mathbf{f} \|_H \leq \| n \|_{H^s}$. برای اثبات دومین نابرابری داریم،

$$\begin{aligned} &\| [v\mathcal{H}n_\lambda]_- n_\lambda - [v\mathcal{H}n_\nu]_- n_\nu \|_\nu \\ &= \frac{1}{\nu} \| ([v\mathcal{H}n_\lambda]_- + [v\mathcal{H}n_\nu]_-)(n_\lambda - n_\nu) + ([v\mathcal{H}n_\lambda]_- - [v\mathcal{H}n_\nu]_-)(n_\lambda + n_\nu) \|_\nu \\ &\leq \frac{1}{\nu} \| [v\mathcal{H}n_\lambda]_- + [v\mathcal{H}n_\nu]_- \|_\infty \| n_\lambda - n_\nu \|_\nu + \frac{1}{\nu} \| [v\mathcal{H}n_\lambda]_- - [v\mathcal{H}n_\nu]_- \|_\nu \| n_\lambda + n_\nu \|_\infty \\ &\leq \frac{|v|}{\nu} (\| \mathcal{H}n_\lambda \|_\infty + \| \mathcal{H}n_\nu \|_\infty) \| \mathbf{f}_\lambda - \mathbf{f}_\nu \|_L + \frac{|v|}{\nu} (\| n_\lambda \|_\infty + \| n_\nu \|_\infty) \| \mathcal{H}n_\lambda - \mathcal{H}n_\nu \|_\nu \\ &\lesssim (\| \mathcal{H}n_\lambda \|_\infty + \| \mathbf{f}_\lambda \|_\infty + \| \mathcal{H}n_\nu \|_\infty + \| \mathbf{f}_\nu \|_\infty) \| \mathbf{f}_\lambda - \mathbf{f}_\nu \|_L. \end{aligned}$$

تخمین مشابه برای جمله دیگر هم برقرار است و دومین نابرابری هم ثابت می‌شود. نابرابری سوم، نتیجه مستقیم دومین نابرابری و همچنین تخمین $\| \mathbf{f} \|_H \lesssim \| \mathbf{f} \|_\infty + \| \mathcal{H}n \|_\infty$ است. \square

تعریف ۴.۷. عمل گر انتقال \mathcal{S}_h^* ، $h \in X$ ، روی مجموعه توابع از X به \mathbb{R} ، به صورت

$$(\mathcal{S}_h f)(x) = f(x - h),$$

تعریف می‌شود. همچنین گروه ترابری $\mathcal{S}_t^\#$ ، $t \in \mathbb{R}$ ، روی فضای H یا L را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$(\mathcal{S}_t \mathbf{f})_v = \mathcal{S}_{vt} \mathbf{f}_v. \quad (۹.۷)$$

همچنین برای هر $\mathbf{f}: [0, T] \rightarrow L$ تعریف می‌کنیم،

$$\mathbf{f}_*(t, \cdot) = \mathcal{S}_{-t} \mathbf{f}(t, \cdot). \quad (۱۰.۷)$$

عمل گر \mathcal{S}_t ، یک ایزومتری روی فضای H یا L است. همچنین برای هر عنصر ثابت $\mathbf{f} \in H$ یا $\mathbf{f} \in L$ ، نگاشت $t \mapsto \mathcal{S}_t \mathbf{f}$ پیوسته است. پس در واقع \mathcal{S}_t یک گروه C^∞ از ایزومتری‌های فضای H یا L است. در نتیجه اگر $\mathbf{f} \in C([0, T]; H)$ (یا $\mathbf{f} \in C([0, T]; L)$) باشد، نگاشت $t \mapsto \mathcal{S}_t \mathbf{f}(t, \cdot)$ متعلق به فضای $C([0, T]; H)$ (یا $C([0, T]; L)$) خواهد بود.

*Shift Operator #Transport Group

به کمک این گروه و عملگر N که در (۸.۷) معرفی شد، می‌توان معادله (۷.۷) را به صورت زیر بازنویسی کرد،

$$S_t \partial_t S_{-t} f = Nf.$$

برای اینکه بتوانیم از یک روش نقطه ثابت*، معادله فوق را حل کنیم، به کمک تعریف (۱۰.۷)، این معادله را به صورت زیر می‌نویسیم،

$$\begin{aligned} \partial_t f_* &= S_{-t} N S_t f_*, \\ f_*(\circ, x) &= f. \end{aligned} \tag{۱۱.۷}$$

در ادامه، وجود و یکتایی جواب این معادله را بررسی خواهیم کرد.

*Fixed Point

۸ مدل تصحیح شده جنبشی

۸-۱ وجود و یکتایی

در این بخش، نتایجی برای وجود و یکتایی جواب برای معادله (۱۱.۷) به اثبات می‌رسانیم. خواننده نا آشنا با فضاهای سوبولف، لازم است قبل از ادامه مطلب، فصل ۵ را مطالعه کند. در ابتدا تخمین‌های اساسی که در این فصل نیاز داریم و در قضیه ۳.۷ بیان شده است را یادآوری می‌کنیم،

$$\|\mathbf{Nf}\|_H \lesssim \|\mathbf{f}\|_H^2, \quad (1.8)$$

$$\|\mathbf{Nf}_1 - \mathbf{Nf}_2\|_L \lesssim (\|\mathcal{H}n_1\|_\infty + \|\mathbf{f}_1\|_\infty + \|\mathcal{H}n_2\|_\infty + \|\mathbf{f}_2\|_\infty) \|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|_L, \quad (2.8)$$

$$\|\mathbf{Nf}_1 - \mathbf{Nf}_2\|_L \lesssim (\|\mathbf{f}_1\|_H + \|\mathbf{f}_2\|_H) \|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|_L. \quad (3.8)$$

یادآوری می‌کنیم که عبارت X می‌تواند تمامی فضای \mathbb{R} و یا دایره، \mathbb{S}^1 ، باشد. نگاه ما به مسأله به عنوان یک معادله دیفرانسیل بر روی یک فضای باناخ* خواهد بود. می‌خواهیم جواب معادله زیر را پیدا کنیم،

$$\partial_t \mathbf{g} = \mathbf{S}_{-t} \mathbf{N} \mathbf{S}_t \mathbf{g}.$$

با بازنویسی این معادله به صورت انتگرالی، هدف ما یافتن یک جواب برای مسأله نقطه ثابت زیر است،

$$\mathbf{g}(t, \cdot) = \mathbf{g}_0 + \int_0^t \mathbf{S}_{-t+\tau} \mathbf{N} \mathbf{S}_{t-\tau} \mathbf{g} \, d\tau. \quad (4.8)$$

در اینجا به مشکلی بر می‌خوریم. جمله غیرخطی معادله را می‌توان روی توابع L^2 تعریف نمود، اما برای اینکه این جمله را در همین فضا کنترل کنیم، به یک تخمین در فضای توابع کران‌دار، L^∞ ، نیز نیاز خواهیم داشت. دوباره اگرچه می‌توان تبدیل هیلبرت را برای توابع کران‌دار هم توسعه داد و تعریف نمود، اما برای کنترل کران تبدیل هیلبرت، به یک تخمین هولدر برای چگالی‌ها احتیاج داریم. مشکل دیگر این است که تبدیل هیلبرت نه تنها یک تبدیل نقطه‌ای نیست، حتی یک عمل‌گر موضعی# هم نیست. خوشبختانه فضای سوبولف جواب‌گوی نیاز ما است، اگرچه همان‌گونه که دیده‌ایم، قسمت غیر خطی معادله، روی این فضا موضعا لپیشیتز نیست. در واقع در اینجا با یک روند غیر استاندارد†، این مسأله را حل خواهیم کرد.

*Banach Space #Local Operator †ad hoc Procedure

برای پیدا کردن جوابی از معادله (۴.۸) که $g \in C^1([0, T]; H)$ باشد، ابتدا خود را به یک گوی بسته به شعاع $R > \|g_0\|_H$ محدود می‌کنیم. اکنون بایستی T را آنقدر کوچک انتخاب کنیم که،

$$\|g_0\|_H + CRT^2 \leq R, \quad 2CRT < 1.$$

ثابت C به وسیله تخمین‌های (۱.۸) و (۳.۸) داده می‌شود. علت این انتخاب، به زودی روشن خواهد شد. با توجه به اینکه نمی‌توان به صورت مستقیم از قضیه نقطه ثابت باناخ استفاده کرد، دنباله $\{g^{(m)}\}_m$ را به صورت زیر می‌سازیم: قرار می‌دهیم $g^{(0)}(t, \cdot) = g_0(\cdot)$ و برای $m \geq 0$ ، تعریف کنید،

$$g^{(m+1)}(t, \cdot) = g_0 + \int_0^t S_{-t} N S_t g^{(m)}(\tau, \cdot) d\tau, \quad (5.8)$$

که منظور از انتگرال فوق، انتگرال گیری در فضای H است. به استقرا داریم $g^{(m)} \in C^1([0, T]; H)$ و با توجه به ایزومتري بودن گروه S و همچنین تخمین (۱.۸) داریم،

$$\begin{aligned} \|g^{(m+1)}(t, \cdot)\|_H &\leq \|g_0\|_H + \int_0^t \|S_{-t} N S_t g^{(m)}(\tau, \cdot)\|_H d\tau \\ &\leq \|g_0\|_H + CT \|g^{(m)}\|_{C([0, T]; H)}. \end{aligned}$$

لذا باز هم به استقرا، این مجموعه توابع، همگی در گوی به شعاع R از فضای $C([0, T]; H)$ قرار می‌گیرند. اکنون نامساوی (۳.۸) نتیجه می‌دهد،

$$\begin{aligned} \|g^{(m+1)}(t, \cdot) - g^{(m)}(t, \cdot)\|_L &\leq \int_0^t \|S_{-t} N S_t g^{(m)}(\tau, \cdot) - S_{-t} N S_t g^{(m-1)}(\tau, \cdot)\|_H d\tau \\ &\leq 2CR \int_0^t \|S_t g^{(m)}(\tau, \cdot) - S_t g^{(m-1)}(\tau, \cdot)\|_L d\tau \\ &= 2CR \int_0^t \|g^{(m)}(\tau, \cdot) - g^{(m-1)}(\tau, \cdot)\|_L d\tau \\ &\leq 2CRT \|g^{(m)} - g^{(m-1)}\|_{C([0, T]; L)}. \end{aligned}$$

لذا با توجه به انتخاب T ، دنباله $\{g^{(m)}\}_m$ در فضای $C([0, T]; L)$ ، یک دنباله کوشی* است. پس این دنباله در این فضا به تابعی که آن را g می‌نامیم، همگرا خواهد بود. در ادامه تلاش خواهیم کرد که نشان دهیم این حد در واقع در فضای H است و می‌توان در تساوی (۵.۸) به حد رفت و (۴.۸) را نتیجه گرفت.

در اینجا بایستی به دو نکته توجه کرد. اول اینکه توابع فضای H^s برای حالت $s > 1/2$ پیوسته هستند. دوم اینکه برای هر $x \in X$ ثابت، نگاشت $f \mapsto f(x)$ ، یک تابع خطی پیوسته روی H^s است. بنابراین تساوی انتگرالی (۵.۸) در واقع به صورت نقطه‌ای هم معتبر است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که دنباله $\{g^{(m)}\}_m$ به علت کران داری در فضای H ، نسبت به متغیر مکان، یک تخمین هولدر یکنواخت دارد و همچنین به علت

*Cauchy Sequence

کران داری این توابع و تساوی نقطه‌ای (۵.۸)، نسبت به زمان به طور یکنواخت لپشیتز است. پس می‌توانیم قضیه آرزلا-آسکولی* را به کار ببریم و یک زیردنباله از $\{g^{(m)}\}_m$ استخراج کنیم که روی زیرمجموعه‌های کران دار $[0, T] \times X$ به طور یکنواخت همگرا باشد. با توجه به همگرایی این دنباله در L ، نتیجه می‌گیریم که این حد یکنواخت هم همان تابع g است و در واقع به خاطر یکنایی حد زیردنباله‌ها، احتیاجی به رفتن به یک زیردنباله هم نیست.

چون عملگر \mathcal{H} روی فضای L^2 پیوسته است، لذا همگرایی $\mathcal{H}g^{(m)} \rightarrow \mathcal{H}g$ در فضای $C([0, T]; L)$ برقرار است. اکنون اگر \mathcal{H} را به معادله (۵.۸) اثر دهیم، مشاهده می‌کنیم که تخمین‌های یکنواخت هولدر و لپشیتز مشابهی برای دنباله $\{\mathcal{H}g^{(m)}\}_m$ برقرار است. لذا دوباره می‌توانیم از قضیه آرزلا-آسکولی استفاده کنیم و نتیجه بگیریم که همگرایی فوق به صورت یکنواخت روی مجموعه‌های کران دار هم برقرار است و لذا $\mathcal{H}g$ نیز همانند g ، پیوسته و کران دار است.

چون $g^{(m)} \in C^{0,1}([0, T]; L)$ و ثابت لپشیتز آن نسبت به m یکنواخت است، لذا خواهیم داشت $g \in C^{0,1}([0, T]; L)$. همچنین $g, \mathcal{H}g \in C_b([0, T] \times X)$. پس با استفاده از نابرابری (۲.۸)، نگاشت $\tau \mapsto S_{-\tau}NS_{\tau}g(\tau, \cdot)$ با مقادیر در فضای L پیوسته خواهد بود. پس تساوی (۴.۸) در فضای L معنادار است. اکنون می‌توانیم با استفاده از نابرابری (۲.۸) در تساوی (۵.۸) به حد برویم و (۴.۸) را به عنوان یک تساوی در فضای L به دست آوریم. همچنین $g \in C^1([0, T]; L)$ خواهد بود.

اکنون نشان می‌دهیم که $g \in H$. تبدیل فوریه روی L^2 پیوسته است و لذا $\mathcal{F}g^{(m)} \rightarrow \mathcal{F}g$ که این همگرایی در فضای L و یکنواخت نسبت به زمان است. پس برای هر زمان ثابت t می‌توانیم زیردنباله‌ای از دنباله $\{\mathcal{F}g^{(m)}\}_m$ استخراج کنیم که تقریباً همه‌جا روی X همگرا باشد. از لم فاتو# نتیجه می‌گیریم که $g(t, \cdot) \in H^s(X)$ و کران دار نسبت به زمان. از سوی دیگر،

$$\mathcal{F}g(t, \cdot) = \mathcal{F}g_0 + \int_0^t \mathcal{F}(S_{-\tau}NS_{\tau}g(\tau, \cdot)) d\tau.$$

نتیجه می‌گیریم،

$$\mathcal{F}g(t + \varepsilon, \cdot) - \mathcal{F}g(t, \cdot) = \int_t^{t+\varepsilon} \mathcal{F}(S_{-\tau}NS_{\tau}g(\tau, \cdot)) d\tau.$$

این تساوی را در $(1 + 4\pi^2 \min\{|\xi|, \lambda\}^2)^{s/2}$ ضرب می‌کنیم و λ را به سمت بی‌نهایت می‌فرستیم که نتیجه می‌دهد $g \in C([0, T]; H)$. لذا تساوی (۴.۸) در فضای H هم معنادار است (و لذا به صورت نقطه‌ای نیز معتبر است). در نتیجه $g \in C^1([0, T]; H)$ و تساوی زیر در فضای H برقرار است،

$$\partial_t g = S_{-t}NS_t g,$$

اکنون در جایگاهی هستیم که بتوانیم قضیه زیر را ثابت کنیم.

*Arzela-Ascoli

#Fatou's Lemma

قضیه ۱.۸ (وجود و یگانگی جواب موضعی برای مدل جنبشی). فرض کنید که داده اولیه یعنی \mathbf{f} در فضای H است. آنگاه زمان T وجود دارد به طوری که معادله (۱۱.۷)، یک جواب منحصر به فرد با شرایط زیر دارد،

$$\mathbf{f} \in L^1([0, T]; H), \quad \mathbf{f}(\circ^+, \cdot) = \mathbf{f}_\circ.$$

این جواب یکتا، دارای خواص زیر است،

$$\mathbf{f}_* \in C^1([0, T]; H), \quad \mathbf{f} \in C([0, T]; H) \cap C^1([0, T]; L).$$

اثبات. توجه کنید که شرط $\mathbf{f} \in L^1([0, T]; H)$ برای نوشتن معادله (۱۱.۷) به صورت معادله انتگرالی زیر کافی است،

$$\mathbf{f}_*(t, \cdot) = \mathbf{f}_\circ + \int_0^t \mathbf{S}_{-t-\tau} \mathbf{N} \mathbf{S}_\tau \mathbf{f}_*(\tau, \cdot) d\tau, \quad (۶.۸)$$

یا می توان به صورت شناخته شده تر زیر در نظریه نیم گروه ها نوشت،

$$\mathbf{f}(t, \cdot) = \mathbf{S}_t \mathbf{f}_\circ + \int_0^t \mathbf{S}_{t-\tau} \mathbf{N} \mathbf{f}(\tau, \cdot) d\tau. \quad (۷.۸)$$

تا کنون وجود جواب را اثبات کرده ایم. یکتایی جواب هم نتیجه مستقیم تخمین (۳.۸) و لم گرنوال* است. در واقع اگر دو جواب \mathbf{f}_1 و \mathbf{f}_2 را برای معادله (۷.۸) تصور کنیم، خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}_1(t, \cdot) - \mathbf{f}_2(t, \cdot)\|_L &\leq \int_0^t \|\mathbf{S}_{t-\tau} \mathbf{N} \mathbf{f}_1(\tau, \cdot) - \mathbf{S}_{t-\tau} \mathbf{N} \mathbf{f}_2(\tau, \cdot)\|_L \\ &= \int_0^t \|\mathbf{N} \mathbf{f}_1(\tau, \cdot) - \mathbf{N} \mathbf{f}_2(\tau, \cdot)\|_L \\ &\leq \gamma CR \int_0^t \|\mathbf{f}_1(\tau, \cdot) - \mathbf{f}_2(\tau, \cdot)\|_L. \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\mathbf{f}_1(\circ, \cdot) = \mathbf{f}_2(\circ, \cdot)$ است، لم گرنوال نتیجه می دهد که $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2$ و یگانگی جواب ثابت می شود. چون $\mathbf{f}_* \in C([0, T]; H)$ و $\mathbf{f}(t, \cdot) = \mathbf{S}_t \mathbf{f}_*(t, \cdot)$ پس داریم $\mathbf{f} \in C([0, T]; H)$. پس عبارت زیر انتگرال در معادله (۷.۸) متعلق به $C([0, T]; H)$ است زیرا \mathbf{N} روی فضای H پیوسته است. لذا به طور خاص، این عبارت زیر انتگرال متعلق به فضای $C([0, T]; L)$ است. پس با توجه به اینکه $\mathbf{S}_t \mathbf{f}_\circ \in C^1([0, T]; L)$ ، نتیجه می گیریم $\mathbf{f} \in C^1([0, T]; L)$. \square

قضیه ۲.۸ (جواب ماکسیمال برای مدل جنبشی). فرض کنید که داده اولیه یعنی \mathbf{f} در فضای H است. آنگاه یک زمان ماکسیمال $T^* = T^*(\mathbf{f})$ وجود دارد به طوری که معادله (۱۱.۷) جواب یکتایی با خواص زیر دارا است،

$$\mathbf{f} \in L^1_{loc}([0, T^*); H), \quad \mathbf{f}(\circ^+, \cdot) = \mathbf{f}_\circ.$$

*Gronwall's Lemma

همچنین با فرض $T^* < +\infty$ خواهیم داشت،

$$\limsup_{t \rightarrow T^{*-}} \|\mathbf{f}(t, \cdot)\|_H = +\infty,$$

در واقع،

$$\int_{T^*-\varepsilon}^{T^*} \|\mathbf{f}(t, \cdot)\|_H^2 dt = +\infty.$$

اثبات. می توان دید که در قضیه قبلی، با قرار دادن $\mathbf{f}(T, \cdot)$ به جای داده های اولیه، می توانیم جواب را بعد از زمان T نیز ادامه دهیم. بنابراین T^* را سوپریمم روی تمام T های ممکن قرار می دهیم. اگر ادعای آخری برقرار نباشد، به کمک صورت انتگرالی معادله یعنی (۷.۸) و نابرابری (۱.۸)، می توان $\mathbf{f}(T^*, \cdot)$ را تعریف نمود و جواب را بعد از زمان T^* نیز ادامه داد که تناقض است. \square

تذکر ۳.۸. این معادله را می توان به صورت عقب گرد در زمان* نیز در نظر گرفت و دقیقاً قضیه مشابهی برای یک زمان T_* برقرار است، به طوری که جواب یکتایی در بازه زمانی $(-T_*, T^*)$ وجود خواهد داشت.

تذکر ۴.۸. برای اثبات وجود جواب، می توان روی کرد دیگری هم داشت که در نوع خود، تکنیک جالب توجهی به شمار می رود. می توانیم دنباله \mathbf{f}_m را بسازیم که عناصر آن، جواب های معادله تأخیری[#] باشند. برای زمان های منفی، این توابع را برابر \mathbf{f}_0 تعریف کنید و برای $k = 0, \dots, m-1$ و زمان های $kT/m < t \leq (k+1)T/m$ قرار دهید،

$$\mathbf{f}^{(m)}(t, \cdot) = \mathbf{f}^{(m)}\left(k\frac{T}{m}, \cdot\right) + \int_{k\frac{T}{m}}^t \mathbf{S}_{-t} \mathbf{N} \mathbf{S}_\tau \mathbf{f}^{(m)}\left(\tau - \frac{T}{m}, \cdot\right) d\tau.$$

با تکنیک کاملاً مشابه اثبات قضیه ۱.۸، می توان نشان داد که این دنباله هم به جواب معادله میل می کند.

در ادامه، ثابت می کنیم که مدل (۱۱.۷)، یک سیستم فیزیکی است. به این معنی که اگر داده اولیه، چگالی فیزیکی باشد، جواب معادله هم چگالی فیزیکی است. منظور از چگالی فیزیکی هم تابعی است که نامنفی و انتگرال پذیر باشد.

گزاره ۵.۸. در قضیه ۲.۸، با فرض اینکه داده اولیه نامنفی است، جواب هم نامنفی خواهد بود. همچنین اگر $\mathbf{f}_0 \in L^1(V; L^1)$ ، آنگاه جواب هم انتگرال پذیر است (البته این در حالت دایره خود به خود برقرار است) و میزان کل جرم، ثابت می ماند.

اثبات. با توجه به اینکه $\|\mathcal{H}n\|_\infty$ روی بازه $[0, T]$ ، $T < T^*$ ، توسط یک ثابت مانند $C(T)$ کنترل می شود، با نگاه کردن به معادله (۶.۸)، برای $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ خواهیم داشت (یادآوری می کنیم که $\mathbf{f}(t, \cdot) =$

*Backward in Time #Delayed Equation

$$, (\mathbf{S}_\tau \mathbf{f}_*(\tau, \cdot))$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{*v}(t_\tau, x) - \mathbf{f}_{*v}(t_1, x) &= \int_{t_1}^{t_\tau} \mathbf{S}_{-\tau} \mathbf{Nf}(\tau, x) d\tau \\ &= \int_{t_1}^{t_\tau} ([v\mathcal{H}n]_- n - (\mu_+[\mathcal{H}n]_- + \mu_-[\mathcal{H}n]_+) \mathbf{f}_v)(\tau, x + v\tau) d\tau \\ &\geq -C(T) \int_{t_1}^{t_\tau} (|v|[n]_- + \mu[\mathbf{f}]_+) (\tau, x + v\tau) d\tau \end{aligned}$$

یا معادلا،

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{*v}(t_\tau, x) - \mathbf{f}_{*v}(t_1, x) \\ \geq -C(T) \int_{t_1}^{t_\tau} \left(|v| \left[\sum_{v' \in V} \mathbf{f}_{*v'}(\tau, x - v'\tau + v\tau) \right]_- + \mu[\mathbf{f}_{*v}(\tau, x)]_+ \right) d\tau, \quad (۸.۸) \end{aligned}$$

که در این محاسبات $|v| = \mu = \mu_+ + \mu_- = \sum_{v \in V} |v|$ است و منظور از \mathbf{f}_{*v} ، مؤلفه متناظر از v از بردار \mathbf{f}_* است. اکنون x و v را ثابت نگه دارید. ادعا می‌کنیم که،

$$\mathbf{f}_{*v}(t, x) \geq -C(T) \int_{\circ}^t |v| \left[\sum_{v' \in V} \mathbf{f}_{*v'}(\tau, x - v'\tau + v\tau) \right]_- d\tau.$$

به برهان خلف، فرض کنید که این نابرابری برای یک لحظه $t_\tau \leq T$ برقرار نباشد. پس به طور خاص خواهیم داشت $\circ < \mathbf{f}_{*v}(t_\tau, x)$ و چون تابع $\mathbf{f}_{*v}(\cdot, x)$ نسبت به زمان پیوسته است و نامنفی در لحظه $t = \circ$ ، پس زمان $t_1 \geq \circ$ وجود دارد طوری که $\mathbf{f}_{*v}(\cdot, x)$ روی بازه (t_1, t_τ) منفی است و $\mathbf{f}_{*v}(t_1, x) = \circ$. اکنون از نابرابری (۸.۸) نتیجه می‌گیریم،

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{*v}(t_\tau, x) &\geq -C(T) \int_{t_1}^{t_\tau} |v| \left[\sum_{v' \in V} \mathbf{f}_{*v'}(\tau, x - v'\tau + v\tau) \right]_- d\tau \\ &\geq -C(T) \int_{\circ}^{t_\tau} |v| \left[\sum_{v' \in V} \mathbf{f}_{*v'}(\tau, x - v'\tau + v\tau) \right]_- d\tau, \end{aligned}$$

که فرض خلف را نقض می‌کند. اکنون تعریف کنید،

$$m_v(t) = \inf_{x \in X} \mathbf{f}_{*v}(t, x), \quad m(t) = \sum_{v \in V} m_v(t).$$

توجه کنید که $a \geq b$ نتیجه می‌دهد $[a]_- \leq [b]_-$. پس،

$$\begin{aligned} -\mathbf{f}_{*v}(t, x) &\leq C(T) \int_{\circ}^t |v| \left[\sum_{v' \in V} \mathbf{f}_{*v'}(\tau, x - v'\tau + v\tau) \right]_- d\tau \\ &\leq C(T) |v| \int_{\circ}^t [m(\tau)]_- d\tau. \end{aligned} \quad (۹.۸)$$

با گرفتن سوپریمم نسبت به x داریم،

$$-m_v(t) \leq C(T)|v| \int_0^t [m(\tau)]_- d\tau.$$

و جمع بستن روی v نتیجه می دهد،

$$[m(t)]_- = \max\{-m(t), 0\} \leq C(T)\mu \int_0^t [m(\tau)]_- d\tau.$$

از لم گرنوال نتیجه می گیریم که $[m(t)]_- = 0$ ، زیرا $[m(0)]_- = 0$. اکنون نابرابری (۹.۸) اثبات را کامل می کند.

برای اثبات پایا بودن جرم کل، ابتدا توجه می کنیم که با فرض $\mathbf{g} \in L = L^1(V; L^1(\mathbb{R}))$ خواهیم داشت $\mathbf{N}\mathbf{g} \in L^1(V; L^1(\mathbb{R}))$. چون $\mathbf{f}(t, \cdot)$ در L کران دار است، پس نرم L^1 تابع $\mathbf{N}\mathbf{f}$ نسبت به زمان کران دار است. اگر از مؤلفه های هر دو طرف تساوی (۷.۸) نسبت به متغیر مکان، یعنی x ، انتگرال بگیریم و از قضیه فوبینی* استفاده کنیم،

$$\begin{aligned} \int_X \mathbf{f}_v(t, x) dx &= \int_X \mathcal{S}_{vt} \mathbf{f}_v(x) dx + \int_X \int_0^t \mathcal{S}_{v(t-\tau)} (\mathbf{N}\mathbf{f})_v(\tau, x) d\tau dx \\ &= \int_X \mathbf{f}_v(x - vt) dx + \int_0^t \int_X \mathcal{S}_{v(t-\tau)} (\mathbf{N}\mathbf{f})_v(\tau, x) dx d\tau \\ &= \int_X \mathbf{f}_v(x) dx + \int_0^t \int_X (\mathbf{N}\mathbf{f})_v(\tau, x) dx d\tau. \end{aligned}$$

با جمع بستن روی v خواهیم داشت،

$$\int_X n(t, x) dx = \int_X n_0(x) dx,$$

□

زیرا برای هر $\mathbf{g} \in L$ داریم $\sum_{v \in V} (\mathbf{N}\mathbf{g})_v = 0$.

تذکره ۶.۸. قابل ذکر است که این اثبات وجود و یکتایی، قابل تعمیم به حالتی کلی تر از تبدیل هیلبرت است، به این معنی که عمل گر \mathcal{H} را می توان با عمل گرهای دیگری غیر از تبدیل هیلبرت هم جایگزین کرد. به عنوان نمونه، می توان هر عمل گر پیچشی (تکینه) و کران دار روی H^s را قرار داد. مثلاً تبدیل تعمیم یافته هیلبرت، یعنی حالت $\alpha > 0$ این گونه است. علت این مسأله این است که در واقع کافی است که تخمین های اساسی مورد استفاده در اثبات که در ابتدای فصل بیان کرده ایم، برقرار باشند. همچنین توجه کنید که این روش اثبات که در اینجا بیان کردیم، در ابعاد بالاتر قابل اعمال نیست: از طرفی بایستی فضای H^s در L^∞ نگاشته شود که لازم می شود $s > d/2$ باشد و از طرفی وجود عمل گر بُرش (یعنی قسمت مثبت و منفی که در معادلات ظاهر می شود)، ما را به حالت $s \leq 1$ محدود می کند.

*Fubini Theorem

تذکر ۷.۸. تا اینجا مسأله را برای تعداد متناهی سرعت حل کردیم. اما زیاد مشکل نیست که ببینیم با رفتن به حد، می‌توان قضایا را برای حالتی که V یک بازه (یا حتی به صورت کلی‌تر، یک مجموعه اندازه‌پذیر) است نیز بیان و اثبات نمود. همچنین در اینجا این نکته را متذکر می‌شویم که حالت محیط متناوب با حالت محیط کران‌دار با شرط مرزی جریان صفر در دو انتها، تفاوت جدی ندارد و می‌توان اثبات‌ها را برای این حالت هم بازنویسی کرد.

۸-۲ تخمین زمان وجود جواب

در این بخش، تخمین‌هایی را برای زمان وجود جواب به دست می‌آوریم، در حالتی که $s = 1$ و $V = \{-1, +1\}$ ، که در واقع ساده‌ترین و جالب‌ترین حالت است. مؤلفه‌های f را به p و q نمایش می‌دهیم و لذا مسأله به صورت زیر بازخوانی می‌شود،

$$\begin{aligned}\partial_t p + \partial_x p &= -[\mathcal{H}n]_+ p + [\mathcal{H}n]_- q, \\ \partial_t q - \partial_x q &= [\mathcal{H}n]_+ p - [\mathcal{H}n]_- q.\end{aligned}\tag{۱۰.۸}$$

گزاره ۸.۸. اگر داده اولیه متقارن باشد، به این معنی که $p_*(x) = q_*(-x)$ برای هر $x \in X$ ، آنگاه جواب هم متقارن می‌ماند.

اثبات. به آسانی می‌توان بررسی کرد که اگر زوج $(p(t, x), q(t, x))$ یک جواب از مسأله (۱۰.۸) باشد، آنگاه $(q(t, -x), p(t, -x))$ هم جواب است. پس گزاره مورد نظر از یکتایی جواب نتیجه خواهد شد. \square

از معادله زیر شروع می‌کنیم،

$$\partial_t p_* = \mathcal{S}_{-t} N(\mathcal{S}_t p_*, \mathcal{S}_{-t} q_*) = \mathcal{S}_{-t} N(p, q),$$

که $p_* = \mathcal{S}_{-t} p$ ، $q_* = \mathcal{S}_t q$ و $N(f, g) = -[\mathcal{H}(f+g)]_+ f + [\mathcal{H}(f+g)]_- g$ اکنون فرم دو خطی*
 $\mathcal{D}(f, g) = \int_X \partial_x f \partial_x g$ را در نظر بگیرید. چون $(p_*, q_*) \in C^1([0, T]; H)$ پس،

$$\frac{d}{dt} \mathcal{D}(p_*, p_*) = 2\mathcal{D}(p_*, \partial_t p_*) = -2\mathcal{D}(p_*, \mathcal{S}_{-t} N(p, q)).$$

اما \mathcal{D} نسبت به انتقال، پایا[‡] است. لذا،

$$\frac{d}{dt} \mathcal{D}(p, p) = -2\mathcal{D}(p, \mathbf{N}(p, q)).$$

*Bilinear Form

‡Invariant

پس داریم،

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_X |\partial_x p|^2 &= \int_X \partial_x p \partial_x ([\mathcal{H}n]_- q - [\mathcal{H}n]_+ p) \\ &= - \int_X [\mathcal{H}n]_+ |\partial_x p|^2 + \int_X [\mathcal{H}n]_- \partial_x p \partial_x q - \int_X \partial_x p (p \partial_x [\mathcal{H}n]_+ - q \partial_x [\mathcal{H}n]_-). \end{aligned}$$

مشابه،

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_X |\partial_x q|^2 = - \int_X [\mathcal{H}n]_- |\partial_x q|^2 + \int_X [\mathcal{H}n]_+ \partial_x p \partial_x q + \int_X \partial_x q (p \partial_x [\mathcal{H}n]_+ - q \partial_x [\mathcal{H}n]_-).$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(\partial_x p, \partial_x q)\|_2^2 &= \int_X [\mathcal{H}n]_+ \partial_x p (\partial_x q - \partial_x p) + \int_X [\mathcal{H}n]_- \partial_x q (\partial_x q - \partial_x p) \\ &\quad + \int_X (\partial_x q - \partial_x p) (p \partial_x [\mathcal{H}n]_+ - q \partial_x [\mathcal{H}n]_-) \\ &\leq \frac{1}{4} \|(\partial_x q, \partial_x p)\|_2^2 \|\mathcal{H}n\|_\infty + \|\partial_x q - \partial_x p\|_2 \|\partial_x \mathcal{H}n\|_2 \|(p, q)\|_\infty, \end{aligned}$$

زیرا برای هر دو عدد حقیقی a, b داریم $a(b - a) \leq b^2/4$. اکنون محاسبات زیر را انجام می دهیم،

$$\begin{aligned} \|\partial_x q - \partial_x p\|_2 \|\partial_x \mathcal{H}n\|_2 &\leq \|\partial_x q - \partial_x p\|_2 \|\partial_x n\|_2 \\ &\leq \frac{1}{4} (\|\partial_x q - \partial_x p\|_2^2 + \|\partial_x p + \partial_x q\|_2^2) \\ &= \|(\partial_x p, \partial_x q)\|_2^2, \end{aligned}$$

که نتیجه می دهد،

$$\frac{d}{dt} \|(\partial_x p, \partial_x q)\|_2 \leq \left(\frac{1}{4} \|\mathcal{H}n\|_\infty + \|(p, q)\|_\infty \right) \|(\partial_x p, \partial_x q)\|_2. \quad (11.8)$$

این نابرابری به همراه نامساوی (۲.۵) برای به دست آوردن تخمینی برای $\|(\partial_x p, \partial_x q)\|_2$ کافی است. همچنین می توانیم در حالت دایره، از (۳.۵) هم استفاده کنیم. در هر حال می توانیم نتایج کمی بهتر را به کمک نابرابری دقیق تر (۱.۵) به دست آوریم. برای این منظور به تخمین مشابهی برای نرم L^2 چگالی ها نیاز داریم. این تخمین با تکنیک مشابه بالا به دست می آید،

$$\frac{d}{dt} \|(p, q)\|_2 \leq \frac{1}{4} \|\mathcal{H}n\|_\infty \|(p, q)\|_2. \quad (12.8)$$

پس اگر قرار دهیم،

$$W = (\|(\partial_x p, \partial_x q)\|_2 \|(p, q)\|_2)^{1/2}, \quad (13.8)$$

خواهیم داشت،

$$\frac{d}{dt}W \leq \left(\frac{1}{4}\|\mathcal{H}n\|_\infty + \frac{1}{4}\|(p, q)\|_\infty\right)W.$$

از سوی دیگر، لم ۱.۵ کمک می کند که تخمین های زیر را داشته باشیم،

$$\begin{aligned}\|\mathcal{H}n\|_\infty &\leq (\|p + q\|_2 \|\partial_x p + \partial_x q\|_2)^{1/2} \leq \sqrt{2}W, \\ \|(p, q)\|_\infty &\leq (\|(p, q)\|_2 \|\partial_x p, \partial_x q\|_2)^{1/2} = W, \quad (X = \mathbb{R}).\end{aligned}$$

در حالت دایره، بایستی به سمت راست دومین نابرابری، M را نیز اضافه کنیم. در حالت داده های متقارن، می توان کمی بهتر نوشت، $\|(p, q)\|_\infty \leq (\frac{1}{4}\|(p, q)\|_2 \|\partial_x p, \partial_x q\|_2)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{4}}W$. دوباره ملاحظه داشته باشید که در حالت دایره، بایستی به سمت راست دومین نابرابری، $M/2$ اضافه شود. نتایج را جمع بندی می کنیم،

$$\frac{d}{dt}W \leq \begin{cases} \gamma W^\alpha, & (X = \mathbb{R}), \\ (m + \gamma W)W, & (X = \mathbb{S}^1), \end{cases} \quad (14.8)$$

که در آن،

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{2 + \sqrt{2}}{4}, & \gamma_{\text{sym}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ m &= \frac{M}{2}, & m_{\text{sym}} &= \frac{M}{4}.\end{aligned} \quad (15.8)$$

اکنون می توانیم قضیه زیر را بیان کنیم.

قضیه ۹.۸ (کران پایین زمان وجود جواب برای مدل جنبشی). در قضیه ۲.۸ داریم،

$$T^*(p_0, q_0) \geq \begin{cases} \gamma^{-1} (\|(p_0, q_0)\|_2 \|\partial_x p_0, \partial_x q_0\|_2)^{-1/2}, & (X = \mathbb{R}), \\ m^{-1} \log(1 + m\gamma^{-1} (\|(p_0, q_0)\|_2 \|\partial_x p_0, \partial_x q_0\|_2)^{-1/2}), & (X = \mathbb{S}^1), \end{cases}$$

که m و γ مطابق با (۱۵.۸) در حالت کلی یا داده اولیه متقارن تعریف می شوند.

اثبات. در حالت $X = \mathbb{R}$ از تخمینی که برای $\frac{d}{dt}W$ در (۱۴.۸) بیان شده است داریم،

$$W(t) \leq \frac{W_0}{1 - \gamma W_0 t},$$

که با توجه به (۱۱.۸) نتیجه می دهد،

$$\frac{d}{dt} \|\partial_x p, \partial_x q\|_2 \leq CW \|\partial_x p, \partial_x q\|_2 \leq \frac{CW_0}{1 - \gamma W_0 t} \|\partial_x p, \partial_x q\|_2.$$

بنابراین،

$$\|\partial_x p, \partial_x q\|_2 \leq \frac{\|(\partial_x p_0, \partial_x q_0)\|_2}{(1 - \gamma W_0 t)^{C/\gamma}}.$$

به طرز مشابه، از (۱۲.۸) نتیجه می‌گیریم که $\|(p, q)\|_2$ نیز تا زمان $1/(\gamma W_0)$ متناهی است و نتیجه مطلوب، از قضیه ۲.۸ حاصل می‌شود.

در حالت $X = \mathbb{S}^1$ از (۱۴.۸) داریم،

$$W(t) \leq \frac{m\gamma^{-1}}{(1 + m\gamma^{-1}W_0^{-1})e^{-mt} - 1}.$$

چون،

$$\|(\partial_x p, \partial_x q)\|_2 = \|(p, q)\|_2^{-1} W^2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}M} W^2,$$

□

دوباره استفاده از قضیه ۲.۸ اثبات را کامل می‌کند.

تذکر ۱۰.۸. همانطور که قبلاً اشاره شد، در حالت دایره، می‌توانیم از لم ۴.۵ به دست آوریم،

$$\|\mathcal{H}n\|_\infty \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \|\partial_x n\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{6}} \|(\partial_x p, \partial_x q)\|_2,$$

$$\|(p, q)\|_\infty \leq M + \frac{1}{2\sqrt{3}} \|(\partial_x p, \partial_x q)\|_2.$$

در حالت داده‌های متقارن داریم،

$$\|(p, q)\|_\infty \leq \frac{M}{2} + \frac{1}{2\sqrt{6}} \|(\partial_x p, \partial_x q)\|_2.$$

بنابراین از نابرابری (۱۱.۸) خواهیم داشت،

$$\frac{d}{dt} \|(\partial_x p, \partial_x q)\|_2 \leq (2m + \beta \|(\partial_x p, \partial_x q)\|_2) \|(\partial_x p, \partial_x q)\|_2, \quad (۱۶.۸)$$

که m در (۱۵.۸) تعریف شده است و

$$\beta = \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{6}}, \quad \beta_{\text{sym}} = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$$

نتیجه می‌گیریم که،

$$T^*(p_0, q_0) \geq \frac{1}{2m} \log \left(1 + \frac{2m}{\beta \|(\partial_x p_0, \partial_x q_0)\|_2} \right), \quad (X = \mathbb{S}^1).$$

۹ انفجار جواب و تمهیدات عددی

۹-۱ تمهیدات عددی

در این بخش به معرفی روشی برای حل عددی معادله بیان شده می‌پردازیم. همچنین اثباتی برای همگرایی این روش ارائه خواهیم کرد.

روشی که در اینجا بیان خواهد شد، اساساً بر پایه «روش خطوط»^{*} بنا می‌شود. در ادامه، این مفهوم را روشن‌تر خواهیم کرد. در ابتدا مسأله را به خانواده‌ای از زیرفضاهای متناهی بُعد فضای H محدود می‌کنیم و نشان می‌دهیم که با چند فرض کاملاً طبیعی که در قضیه زیر به آنها اشاره می‌شود، این جواب‌ها به جواب واقعی معادله همگرا خواهند بود.

قضیه ۱.۹ (همگرایی جواب گسسته‌شده به جواب اصلی). فرض کنید $\{E_k\}_k$ دنباله‌ای از زیرفضاهای با بُعد متناهی از $H^s(X)$ باشد که تحت عمل‌گر انتقال بسته‌اند. قرار دهید $H_k = L^2(V; E_k) \hookrightarrow H$ و فرض کنید که نگاشت‌های تصویر $\{\mathbb{P}_k: H \rightarrow H_k\}_k$ در شرط زیر (به صورت یکنواخت) صدق می‌کنند،

$$\|\mathbb{P}_k \mathbf{g} - \mathbf{g}\|_L \lesssim \omega_k \|\mathbb{P}_k \mathbf{g} - \mathbf{g}\|_H, \quad (1.9)$$

که دنباله $\{\omega_k\}_k$ کران‌دار است و به علاوه برای هر \mathbf{g} ثابت در فضای H داریم،

$$\|\mathbb{P}_k \mathbf{g} - \mathbf{g}\|_H \rightarrow 0. \quad (2.9)$$

(این همگرایی لزوماً نسبت به \mathbf{g} یکنواخت نیست). آنگاه زمان مثبت T وجود دارد به طوری که معادله

$$\mathbf{S}_t \partial_t \mathbf{S}_{-t} \mathbf{f}^{(k)} = \mathbb{P}_k \mathbf{Nf}^{(k)}, \quad (3.9)$$

جواب یکتایی با شرط اولیه $\mathbb{P}_k \mathbf{f}_0$ در بازه زمانی $[0, T]$ در فضای H_k دارد و

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{f}\|_L = o(\omega_k),$$

*Method of Lines

که \mathbf{f} جواب معادله (۱۱.۷) است. در واقع $\mathbf{f}^{(k)}$ روی زیرمجموعه‌های کران‌دار $X \times [0, T]$ به طور یکنواخت به \mathbf{f} همگراست. به علاوه در حالت $s = 1$ اگر $\omega_k \rightarrow 0$ داریم،

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\Delta_{\omega_k} \mathbf{f}^{(k)} - \partial_x \mathbf{f}\|_L = o(1),$$

که Δ_h عملگر مشتق گسسته است، یعنی،

$$\Delta_h u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}.$$

اثبات. از فرض همگرایی (۲.۹) به همراه قضیه کران‌داری یکنواخت* (که به باناخ-اشتاینهاوس[#] هم معروف است) نتیجه می‌گیریم،

$$\|\mathbb{P}_k \mathbf{g}\|_H \lesssim \|\mathbf{g}\|_H, \quad (۴.۹)$$

از آنجا که بعد E_k متناهی است، لذا نرم‌های القایی از فضاها L و H با هم معادل هستند. پس بنا به نابرابری‌های (۴.۹) و (۳.۸)، قسمت غیرخطی روی زیرمجموعه‌های کران‌دار این فضا، لپشیتز است. لذا طبق قضیه وجود و یکتایی پیکارد[†] برای معادلات دیفرانسیل عادی روی فضاها با بُعد متناهی، معادله (۳.۹) جواب یکتایی دارد و به دلیل تخمین یکنواخت (۱.۸) و کران‌دار بودن $\mathbb{P}_k \mathbf{f}_0$ ، تمامی این جواب‌ها روی یک بازه زمانی $[0, T]$ معتبر هستند. به عبارت دقیق، چون $\mathbf{f}_*^{(k)} \in C^1([0, t], H)$ از تساوی

$$\partial_t \mathbf{f}_*^{(k)} = \mathbf{S}_{-t} \mathbb{P}_k \mathbf{N} \mathbf{S}_t \mathbf{f}_*^{(k)},$$

خواهیم داشت،

$$\partial_t \|\mathbf{f}_*^{(k)}\|_H \leq \|\partial_t \mathbf{f}_*^{(k)}\|_H = \|\mathbb{P}_k \mathbf{N} \mathbf{S}_t \mathbf{f}_*^{(k)}\|_H \leq C \|\mathbf{f}_*^{(k)}\|_H^2,$$

و لذا،

$$\|\mathbf{f}^{(k)}\|_H = \|\mathbf{f}_*^{(k)}\|_H \leq \frac{\|\mathbb{P}_k \mathbf{f}_0\|_H}{1 - C \|\mathbb{P}_k \mathbf{f}_0\|_H t} \leq \frac{C \|\mathbf{f}_0\|_H}{1 - C \|\mathbf{f}_0\|_H t}.$$

با استفاده از قضیه ۲.۸ نتیجه می‌گیریم که می‌توانیم $T \lesssim \|\mathbf{f}_0\|_H^{-1}$ انتخاب کنیم. همچنین تمامی این جواب‌ها کران یکنواختی در فضای H دارند و با نگاه به معادلات انتگرالی زیر،

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(k)}(t, \cdot) &= \mathbf{S}_t \mathbf{f}_0^{(k)} + \int_0^t \mathbf{S}_{t-\tau} \mathbb{P}_k \mathbf{N} \mathbf{f}^{(k)}(\tau, \cdot) d\tau, \\ \mathbf{f}(t, \cdot) &= \mathbf{S}_t \mathbf{f}_0 + \int_0^t \mathbf{S}_{t-\tau} \mathbf{N} \mathbf{f}(\tau, \cdot) d\tau, \end{aligned}$$

*Uniform Boundedness Theorem

#Banach-Steinhaus Theorem

†Picard Theorem

خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{f}\|_L &\leq \|\mathbb{P}_k \mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_0\|_L + \int_0^t \|\mathbb{P}_k \mathbf{Nf}^{(k)} - \mathbf{Nf}\|_L d\tau \\ &\leq \|\mathbb{P}_k \mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_0\|_L + \int_0^t \|\mathbb{P}_k \mathbf{Nf}^{(k)} - \mathbf{Nf}^{(k)}\|_L d\tau + \int_0^t \|\mathbf{Nf}^{(k)} - \mathbf{Nf}\|_L d\tau \\ &\leq \|\mathbb{P}_k \mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_0\|_L + \int_0^T \|\mathbb{P}_k \mathbf{Nf}^{(k)} - \mathbf{Nf}^{(k)}\|_L d\tau + C \int_0^t \|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{f}\|_L d\tau, \end{aligned}$$

که ثابت C فقط وابسته به شرط اولیه است. از لم گرنوال نتیجه می‌گیریم،

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{f}\|_L &\leq e^{Ct} \left(\|\mathbb{P}_k \mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_0\|_L + \int_0^T \|\mathbb{P}_k \mathbf{Nf}^{(k)} - \mathbf{Nf}^{(k)}\|_L d\tau \right) \\ &\lesssim \omega_k \left(\|\mathbb{P}_k \mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_0\|_H + \int_0^T \|\mathbb{P}_k \mathbf{Nf}^{(k)} - \mathbf{Nf}^{(k)}\|_H d\tau \right). \end{aligned}$$

از (۲.۹) به همراه قضیه تسلطی لبگ نتیجه می‌گیریم که $\|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{f}\|_L = o(\omega_k)$. بنابراین به ویژه $\mathbf{f}^{(k)}$ به طور یکنواخت نسبت به زمان، در فضای L به \mathbf{f} همگراست. همچنین دنباله $\{\mathbf{f}^{(k)}\}_k$ در یک شرط هولدر نسبت به مکان و لپیشیتز نسبت به زمان به صورت یکنواخت، صدق می‌کند. لذا مجدداً قضیه آرزو-آسکولی حکم می‌کند که می‌توان زیردنباله‌ای از آن استخراج کرد که به صورت یکنواخت روی مجموعه‌های فشرده، همگرا باشد. به علت همگرایی در فضای L ، نتیجه می‌گیریم که این حد، یکتاست و برابر \mathbf{f} است و نیازی به گذرکردن به یک زیردنباله هم نیست.

برای قسمت آخر، چون برای هر $f \in L^2$ داریم $\|f\|_2/h \leq \|\Delta_h f\|_2$ ، پس،

$$\|\Delta_{\omega_k} \mathbf{f}^{(k)} - \Delta_{\omega_k} \mathbf{f}\|_L = o(1).$$

همچنین برای هر $f \in H^1$ داریم $\|\Delta_{\omega_k} f - \partial_x f\|_2 = o(1)$ و با توجه به اینکه $f \in C([0, T]; H)$ ، این همگرایی نسبت به زمان یکنواخت است و اثبات کامل می‌شود. \square

تذکر ۲.۹. دقت کنید که این همگرایی در واقع تا زمانی که جواب‌ها معتبر هستند برقرار است. تخمین یکنواخت (۴.۹) ما را مطمئن می‌سازد که بازه زمانی وجود دارد که همه جواب‌ها معتبر هستند.

در فصل ۶ نشان داده‌ایم که به کمک تبدیل فوریه گسسته*، می‌توانیم نگاهی مناسب تصویر بسازیم که خواص مورد نظر در قضیه قبلی را دارد. به تعبیر ساده‌تر، قضیه ۱.۹ به همراه خواص تبدیل فوریه گسسته، این امکان را می‌دهد که برای شبیه‌سازی عددی، از این تبدیل گسسته استفاده کنیم.

در اینجا معادله (۳.۹) را به زبان تبدیل فوریه گسسته، DFT، ترجمه می‌کنیم. تبدیل فوریه گسسته $\mathbf{f}^{(k)}$ را به \mathbf{g} نشان می‌دهیم، یعنی $\mathbf{f}^{(k)} = \tilde{\mathbf{g}}$. معادله (۳.۹) به صورت زیر بازخوانی می‌شود،

$$\mathbf{S}_t \partial_t \mathbf{S}_{-t} \tilde{\mathbf{g}} = \mathbb{P}_k \mathbf{N} \tilde{\mathbf{g}}.$$

*Discrete Fourier Transform

با توجه به اینکه این معادله در فضای E_k است، معادلا لازم و کافی است که این تساوی در نقاط نمونه برداری یعنی x_m که $|m| \leq k$ برقرار باشد. بنابراین با در ذهن داشتن این نکته که $\tilde{\mathbf{g}} \in E_k$ ، معادله فوق به صورت زیر بازنویسی می شود،

$$\mathcal{S}_{vt} \frac{d}{dt} \mathcal{S}_{-vt} \mathbf{g}_v = (N\mathbf{g})_v := [v\mathcal{H}n]_- n - (\mu_+[\mathcal{H}n]_- + \mu_-[\mathcal{H}n]_+) \mathbf{g}_v. \quad (5.9)$$

که منظور از \mathcal{H} و \mathcal{S} ، نسخه های گسسته آنها است و $n = \sum_v \mathbf{g}_v$

گزاره ۳.۹. برای جواب معادله (۵.۹) داریم،

$$\sum_{|m| \leq k} n_m = \sum_{|m| \leq k} n_{\circ m}.$$

اثبات. اگر در (۵.۹) روی v جمع ببندیم، سمت راست برابر صفر خواهد شد و لذا،

$$\circ = \sum_m \sum_v (\mathcal{S}_{vt} \frac{d}{dt} \mathcal{S}_{-vt} \mathbf{g}_v)_m = \sum_v \sum_m (\mathcal{S}_{vt} \frac{d}{dt} \mathcal{S}_{-vt} \mathbf{g}_v)_m.$$

همچنین برای هر بردار b با یادآوری تعریف (۲.۶) از عمل گر انتقال گسسته، خواهیم داشت،

$$\sum_m (\mathcal{S}_y b)_m = (\mathcal{F}_d \mathcal{S}_y b)_{j=\circ} = (\mathcal{F}_d b)_{j=\circ} = \sum_m b_m.$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \circ &= \sum_v \sum_m \left(\frac{d}{dt} \mathcal{S}_{-vt} \mathbf{g}_v \right)_m = \sum_v \frac{d}{dt} \sum_m (\mathcal{S}_{-vt} \mathbf{g}_v)_m \\ &= \sum_v \frac{d}{dt} \sum_m \mathbf{g}_{v,m} = \frac{d}{dt} \sum_m \sum_v \mathbf{g}_{v,m} = \frac{d}{dt} \sum_m n_m, \end{aligned}$$

□

که اثبات را کامل می کند.

اکنون می توانیم دستگاه معادلات دیفرانسیل مورد نظر را با بردار مجهول $\mathcal{S}_{-t} \mathbf{g}$ ، به کمک روش های شناخته شده عددی، حل کنیم. مشکل نیست که ببینیم که هر روش صریح رانگ-کوتا* معادل این است که مسأله را به چند قسمت مجزا از هم ترابری و واکنش تبدیل کنیم. در ساده ترین حالت، اگر از روش صریح اویلر# استفاده کنیم، روش مورد نظر به این خلاصه می شود که ابتدا قسمت غیرخطی را برای محاسبه واکنش به کار می بریم و سپس چگالی های اصلاح شده را به کمک معادله ترابری، انتقال می دهیم. مزیت این گونه روش در این است که هیچ گونه شرط «کوران-فردریش-لوی»† برای پایداری روش، لازم نیست. به عبارت

*Explicit Runge-Kutta Method condition

#Explicit Euler Method

†Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

دقیق تر، لازم نیست که نسبت قدم مکانی به قدم زمانی، τ/h ، کوچک باشد که τ نمایش گر قدم زمانی است. ما در اینجا روش هون* [۳۹] را پیاده سازی کرده ایم. این روش به صورت زیر خلاصه می شود،

$$g(t + \tau) = S_{\tau}g(t) + \frac{\tau}{\gamma} \left(S_{\tau}Ng(t) + NS_{\tau}(g(t) + \tau Ng(t)) \right). \quad (۶.۹)$$

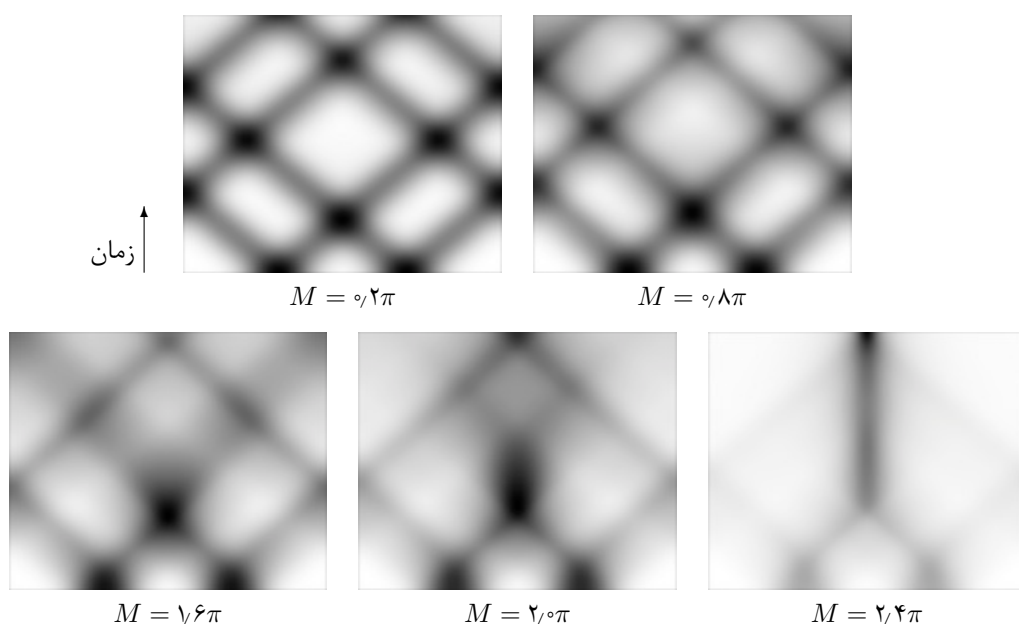
همچنین برای سادگی هرچه بیشتر، می توان نسبت τ/h را برابر یک عدد صحیح انتخاب کرد تا عمل گر انتقال گسسته، تبدیل به یک گردش ساده نمونه ها شود.

۹-۲ شبیه سازی عددی

در اینجا شبیه سازی عددی را در حالت $V = \{+1, -1\}$ انجام می دهیم. ابتدا کد برنامه استفاده شده برای شبیه سازی عددی را می آوریم. توجه کنید که p و q به ترتیب نمایش گر چگالی ذرات در حال حرکت به سمت راست و چپ هستند.

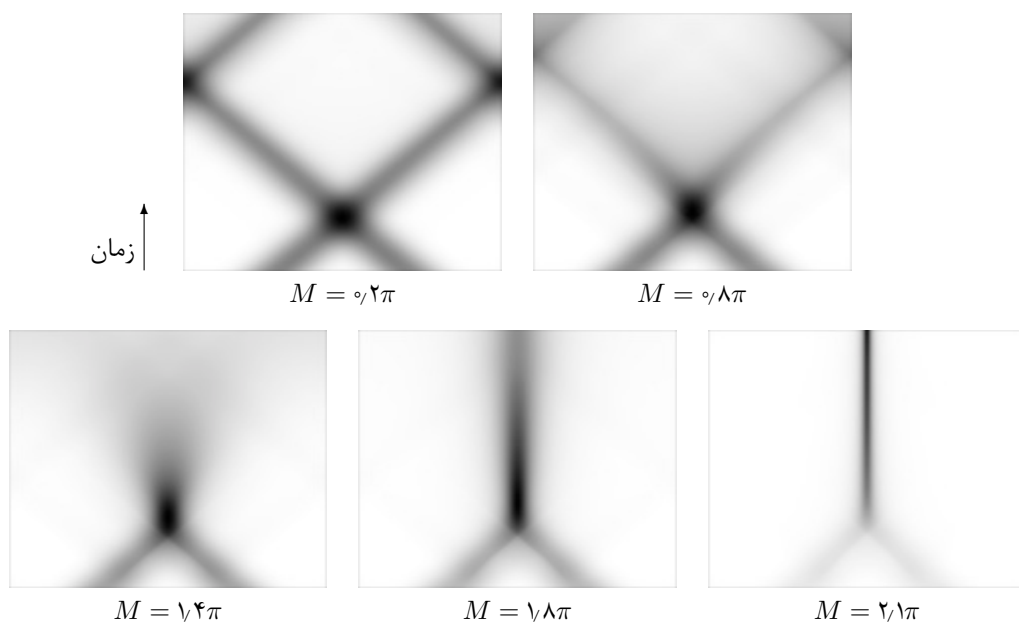
```
a = ...; %chemical degradation
M = ...; %total mass
Mp = ...; %ratio of the mass of p to the total mass
N = 2*...; %number of points; which is better to be a power of 2
CFL = ...; %dt/dx; must be an integer number
T = ...; %final time
dx = 1/N;
dt = CFL*dx;
x = -(N-1)/2:(N-1)/2'*dx; %represents the interval (-1/2,1/2)
p0 = ...; %starting profile of p with respect to x
q0 = ...; %starting profile of q with respect to x
p = Mp*M * p0 / (sum(p0) * dx);
q = (1-Mp)*M * q0 / (sum(q0) * dx);
FGH = -1i*[0 (1:N/2-1)./(a+(1:N/2-1)) 0 (1-N/2:-1)./(a-(1-N/2:-1))];
for time = 0:dt:T-dt
    gS = -ifft(FGH.*fft(p+q));
    nL = -gS.*((gS<0).*p + (gS>0).*q);
    ps = circshift(p-dt*Npq, CFL);
    qs = circshift(q+dt*Npq, -CFL);
    gS = -ifft(FH.*fft(ps+qs));
    Nppq = -gS.*((gS<0).*ps + (gS>0).*qs);
    p = circshift(p - dt/2*Npq, CFL) - dt/2*Nppq;
    q = circshift(q + dt/2*Npq, -CFL) + dt/2*Nppq;
    %generate graphs and keep image data
end
```

*Heun's Method



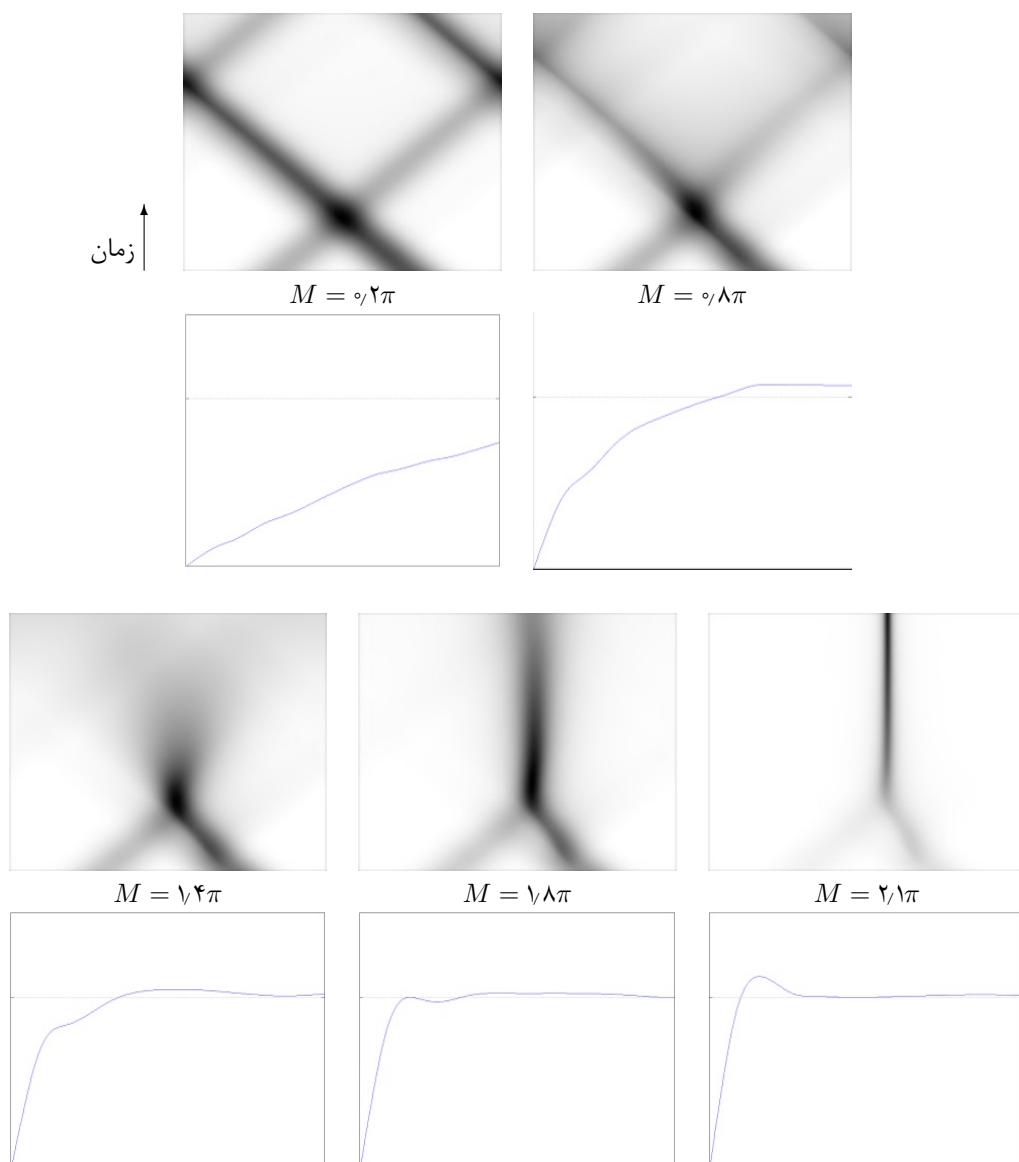
شکل ۱.۹: دو توده جرم، مدل جنبشی

در اینجا $p_0 = q_0 = C_M (\exp(-100(x - 0.2)^2) + \exp(-100(x + 0.2)^2))$ به عنوان شرایط اولیه هستند و ثابت C_M به گونه‌ای است که جرم کل، برابر M باشد. در این تصاویر، تحول چگالی ذرات را برای $\alpha = 0$ می‌بینید و پارامترها به صورت $h = 2^{-14}$ و $\tau/h = 2$ انتخاب شده‌اند و تا زمان $T = 1$ پیش رفته‌ایم.

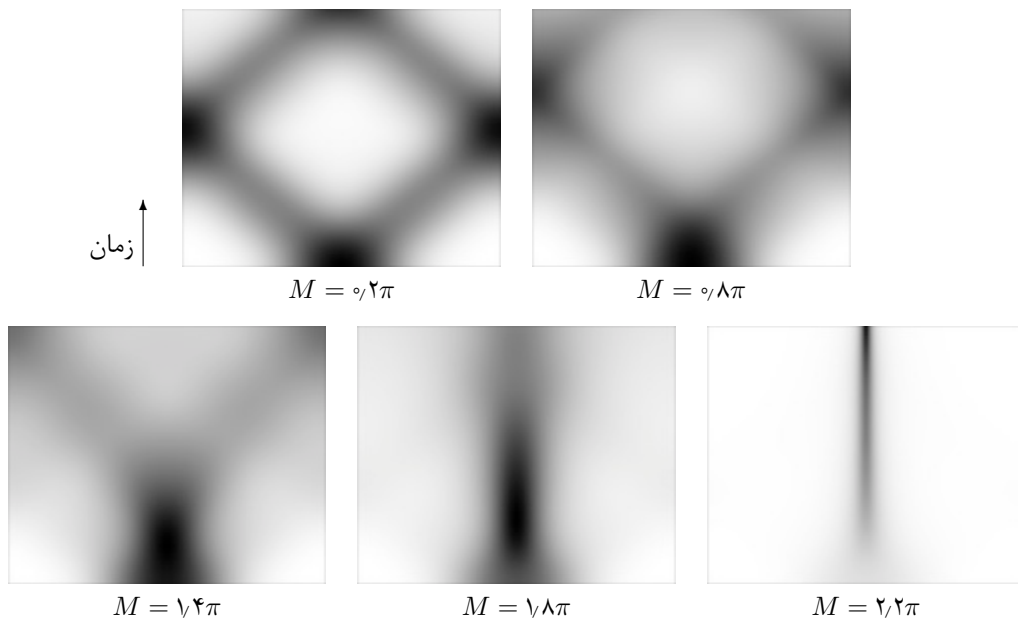


شکل ۲.۹: حرکت دو توده با جرم مساوی به سمت هم، مدل جنبشی

در این شکل‌ها، شرایط اولیه به صورت $p_0 = C_M \exp(-100(x + 0.2)^2)$ و $q_0 = C_M \exp(-100(x - 0.2)^2)$ هستند و دوباره ثابت C_M به گونه‌ای است که جرم کل برابر M باشد. بقیه پارامترها همانند شکل ۱.۹ است.



شکل ۳.۹: حرکت دو توده با جرم متفاوت به سمت هم، مدل جنبشی شرایط اولیه را $p_0 = 0.3 C_M \exp(-100(x + 0.2)^2)$ و $q_0 = 0.7 C_M \exp(-100(x - 0.2)^2)$ قرار داده‌ایم. بقیه پارامترها همانند شکل ۱.۹ تنظیم شده است. همچنین می‌توانید تحول نسبت جرم ذرات متحرک به راست به جرم کل ذرات را ببینید. محور افقی نمایان‌گر زمان است و محور عمودی نشان‌گر نسبت مورد نظر. محور عمودی در واقع بازه $[0.3, 0.6]$ است.



شکل ۴.۹: یک توده جرم، مدل جنبشی

در اینجا $p_0 = q_0 = C_M \exp(-3x^2)$ است.

نمودارهای شبیه‌سازی شده، توسط نرم‌افزار MATLAB تولید شده‌اند. در شکل ۱.۹، دو توده جرم در دو نقطه قرار داده شده است. در لحظه شروع، نیمی از ذرات به سمت راست و نیمی دیگر به سمت چپ می‌روند. ملاحظه می‌کنیم که برای جرم کوچک، هر کدام از این دو توده به دو بخش مجزا تفکیک می‌شود که به سمت راست و چپ حرکت می‌کنند و در هر تصادف، بدون اینکه تأثیر زیادی روی هم داشته باشند، از هم عبور می‌کنند. برای جرم‌های بزرگ‌تر، سلول‌ها کم‌کم در محیط پخش می‌شوند. اگر جرم ذرات از 2π بیشتر باشد اما نه چندان زیاد، در این صورت جاذبه بین ذرات بر حرکت انتقالی آنها غلبه می‌کند و تنها بخش کوچکی از ذرات می‌توانند از تمرکز در مرکز فرار کنند. اگر جرم به اندازه کافی بزرگ باشد، انفجار و تجمع ذرات را خواهیم داشت.

تمایز بین شکل ۱.۹ و شکل ۲.۹ در این است که در دومی، دو توده ذرات در ابتدا به سمت هم حرکت می‌کنند. در این حالت با توجه به اینکه مشتق اول زمانی گشتاور دوم چگالی ذرات، منفی است، انفجار در زمان کوتاه‌تر و برای جرم‌های کوچک‌تر اتفاق می‌افتد.

در شکل ۳.۹، قسمت بیشتری از ذرات را در سمت راست قرار داده‌ایم. این باعث شده است که توده ثقیل‌تر، توده با جرم کمتر را به سمت خود جذب کند، البته اگر جرم کل از حدی بیشتر باشد. نکته جالب توجه دیگر اینکه به نظر می‌رسد ذرات تمایل به این دارند که نیمی به چپ و نیمی به سمت راست حرکت کنند. مخصوصاً وقتی جرم کل بزرگ باشد، این پدیده به سرعت حاصل می‌شود.

در شکل ۴.۹، فقط یک توده جرم اطراف مرکز قرار داده‌ایم. در این شکل، تحول چگالی ذرات را برای

مقادیر مختلف جرم، مشاهده می‌کنید.

در حالت $\alpha > 0$ ، می‌توان دید که هرچه این پارامتر بزرگ‌تر باشد، جرم بحرانی هم بیشتر خواهد شد.

۳-۹ انفجار جواب

مسئله انفجار جواب را در حالت $V = \{+1, -1\}$ و $\alpha = 0$ بررسی می‌کنیم، یعنی سلول‌ها با سرعت ثابت به چپ یا راست حرکت می‌کنند و ماده شیمیایی نابود نمی‌شود. ابتدا معادلات را نسبت به چگالی ذرات، $n = p + q$ و جریان ذرات یعنی $j = p - q$ بازنویسی می‌کنیم،

$$\begin{aligned} \partial_t n + \partial_x j &= 0, \\ \partial_t j + \partial_x n &= -n|Hn| - j|Hn|. \end{aligned} \quad (7.9)$$

روی دایره. باز هم مشتق زمانی کمیت $J(t) = \int_{\mathbb{S}^1} n(x) \cos 2\pi x \, dx$ را محاسبه می‌کنیم. بر خلاف مدل ماکروسکوپی، در اینجا لازم است که دو بار مشتق بگیریم،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J &= - \int_{\mathbb{S}^1} \partial_x j(x) \cos 2\pi x \, dx = 2\pi \int_{\mathbb{S}^1} j(x) \sin 2\pi x \, dx. \\ \frac{1}{2\pi} \frac{d^2}{dt^2} J &= - \int_{\mathbb{S}^1} (\partial_x n + j|Hn| + n|Hn|) \sin 2\pi x \, dx \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{S}^1} n(x) \cos 2\pi x \, dx - \int_{\mathbb{S}^1} j|Hn| \sin 2\pi x \, dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\mathbb{S}^1} (\sin 2\pi x - \sin 2\pi y) \cot \pi(x-y) n(x)n(y) \, dx \, dy \\ &= 2\pi J - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} (\cos 2\pi x + \cos 2\pi y) n(x)n(y) \, dx \, dy - \int_{\mathbb{S}^1} j|Hn| \sin 2\pi x \, dx \\ &= (2\pi - M)J - \int_{\mathbb{S}^1} j|Hn| \sin 2\pi x \, dx. \end{aligned}$$

روی کل خط حقیقی. اینجا هم مشتق دوم زمانی گشتاور دوم $I(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} x^2 n(t, x) dx$ را محاسبه می‌کنیم،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} x^2 \partial_t n = -\frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} x^2 \partial_x j = \int_{\mathbb{R}} x j. \\ \frac{d^2}{dt^2} I &= \int_{\mathbb{R}} x \partial_t j \\ &= - \int_{\mathbb{R}} x \partial_x n - \int_{\mathbb{R}} x n \mathcal{H}n - \int_{\mathbb{R}} x j |\mathcal{H}n| \\ &= M - \frac{M^2}{2\pi} - \int_{\mathbb{R}} x j |\mathcal{H}n|. \end{aligned}$$

این نامساوی‌ها ما را به این نکته راهنمایی می‌کند که احتمالاً جرم بحرانی در این مدل نیز برابر $M_{\text{crit}} = 2\pi$ است، همانند مدل ماکروسکوپیک تصحیح‌شده [۱۲]. شبیه‌سازی‌های عددی، شاهدهی بر ادعای مطرح شده در مورد جرم بحرانی است.

۹-۴ بررسی نمایه انفجار

در اینجا سؤالی می‌تواند مطرح گردد و آن اینکه نمایه انفجار جواب* چه می‌تواند باشد. با توجه به اینکه معادله مورد نظر روی خط حقیقی، نسبت به مقیاس کردن به شکل $u_\lambda(t, x) = \lambda u(\lambda t, \lambda x)$ ناوردا# است، می‌توان طبق معمول انتظار داشت که نمایه انفجار به همین شکل به دست آید. در واقع قابل قبول است که به دنبال جواب‌هایی به شکل $n(t, x) = \frac{1}{t} n_*(\frac{x}{t})$ و $j(t, x) = \frac{1}{t} j_*(\frac{x}{t})$ برای معادله عقب‌گرد در زمان بگردیم تا انفجار جواب در لحظه صفر رخ دهد. اگر قرار دهیم $y = \frac{x}{t}$ ، با شروع از (۷.۹) با محاسبات ساده می‌توان به تساوی‌های زیر رسید، (باز هم تذکر می‌دهیم که معادلات را باید به صورت عقب‌گرد در زمان اصلاح کرد)

$$\begin{aligned} (yn_*)' + j_*' &= 0, \\ (yj_*)' + n_*' &= -n_* \mathcal{H}n_* - j_* |\mathcal{H}n_*|. \end{aligned}$$

اگر فرض انتگرال‌پذیری به‌هرگونه‌ای روی n_* و j_* داشته باشیم، از اولین معادله نتیجه می‌شود که $j_* = -yn_*$. بنابراین به معادله زیر برای n_* خواهیم رسید،

$$((1-y^2)n_*)' + n_* \mathcal{H}n_* - yn_* |\mathcal{H}n_*| = 0, \quad -1 \leq y \leq 1. \quad (۸.۹)$$

توجه کنید از آنجا که $|j| \leq n$ ، پس n_* خارج از محدوده $[-1, 1]$ برابر صفر است.

قضیه ۴.۹ (عدم وجود جواب خود-مشابه برای پایین جرم بحرانی). اگر $\alpha = 0$ باشد، معادله (۸.۹) هیچ جواب ضعیفی در L^1 ندارد، با فرض اینکه $0 < M \leq 2\pi$ و $M = \int n_*$.

*Blow-up Profile

#Invariant

اثبات. به برهان خلف، فرض کنید تابع n که محمل* آن در بازه $[-1, 1]$ است، جوابی برای این معادله باشد. اگر معادله مورد نظر را در y ضرب کرده و انتگرال بگیریم، خواهیم داشت،

$$-M + \int y^n + \frac{M^\gamma}{\sqrt{\pi}} - \int y^n |\mathbb{H}n| = 0.$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} \int y^n |\mathbb{H}n| &\geq \sqrt{\pi} \int y|y|n \mathbb{H}n \\ &= \iint \frac{x|x| - y|y|}{x - y} n(x)n(y) dx dy \\ &= \iint_{xy > 0} (|x| + |y|)n(x)n(y) dx dy + \iint_{xy < 0} \frac{x^\gamma + y^\gamma}{|x| + |y|} n(x)n(y) dx dy \end{aligned}$$

بنابراین خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} \int y^n |\mathbb{H}n| &\geq \sqrt{\pi} \iint_{xy > 0} |y|n(x)n(y) dx dy + \iint_{xy < 0} \frac{|x| + |y|}{\sqrt{\pi}} n(x)n(y) dx dy \\ &= \sqrt{\pi} \iint_{xy > 0} |y|n(x)n(y) dx dy + \iint_{xy < 0} |y|n(x)n(y) dx dy \\ &> M \int |y|n. \end{aligned}$$

لذا،

$$\begin{aligned} \frac{M^\gamma}{\sqrt{\pi}} - M + \int |y|n &\geq \frac{M^\gamma}{\sqrt{\pi}} - M + \int y^n \\ &= \int y^n |\mathbb{H}n| \\ &> \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int |y|n. \end{aligned}$$

پس داریم،

$$\left(\frac{M}{\sqrt{\pi}} - 1\right) \left(M - \int |y|n\right) > 0,$$

□

که با فرض $M \leq \sqrt{\pi}$ در تناقض است، زیرا $\int |y|n \leq M$.

*Support

مراجع

- [١] Adams, R. A. *Sobolev spaces*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.
- [٢] Biler, P. Global solutions to some parabolic-elliptic systems of chemotaxis. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 9(1):347–359, 1999.
- [٣] Biler, P. and Nadzieja, T. Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interaction of particles. I. *Colloq. Math.*, 66(2):319–334, 1994.
- [٤] Blanchet, A., Dolbeault, J., and Perthame, B. Two-dimensional Keller-Segel model: optimal critical mass and qualitative properties of the solutions. *Electron. J. Differential Equations*, pp. No. 44, 32 pp. (electronic), 2006.
- [٥] Bournaveas, N. and Calvez, V. Critical mass phenomenon for a chemotaxis kinetic model with spherically symmetric initial data. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(5):1871–1895, 2009.
- [٦] Bournaveas, N., Calvez, V., Gutiérrez, S., and Perthame, B. Global existence for a kinetic model of chemotaxis via dispersion and Strichartz estimates. *Comm. Partial Differential Equations*, 33(1-3):79–95, 2008.
- [٧] Caglioti, E., Lions, P.-L., Marchioro, C., and Pulvirenti, M. A special class of stationary flows for two-dimensional Euler equations: a statistical mechanics description. *Comm. Math. Phys.*, 143(3):501–525, 1992.
- [٨] Calderon, A. P. and Zygmund, A. On the existence of certain singular integrals. *Acta Math.*, 88:85–139, 1952.
- [٩] Calvez, V. and Carrillo, J. A. Volume effects in the Keller-Segel model: energy estimates preventing blow-up. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 86(2):155–175, 2006.
- [١٠] Calvez, V. and Dolak-Struss, Y. Asymptotic behavior of the Keller–Segel model with and without density control. *Preprint*, 2005.

- [11] Calvez, V. and Perthame, B. A Lyapunov function for a two-chemical species version of the chemotaxis model. *BIT*, 46(suppl.):S85–S97, 2006.
- [12] Calvez, V., Perthame, B., and Sharifi tabar, M. Modified Keller-Segel system and critical mass for the log interaction kernel. in *Stochastic analysis and partial differential equations*, vol. 429 of *Contemp. Math.*, pp. 45–62. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [13] Carlen, E. and Loss, M. Competing symmetries, the logarithmic HLS inequality and Onofri’s inequality on S^n . *Geom. Funct. Anal.*, 2(1):90–104, 1992.
- [14] Carrillo, J. A., Jüngel, A., Markowich, P. A., Toscani, G., and Unterreiter, A. Entropy dissipation methods for degenerate parabolic problems and generalized Sobolev inequalities. *Monatsh. Math.*, 133(1):1–82, 2001.
- [15] Corrias, L. and Perthame, B. Critical space for the parabolic-parabolic Keller-Segel model in \mathbb{R}^d . *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 342(10):745–750, 2006.
- [16] Corrias, L., Perthame, B., and Zaag, H. Global solutions of some chemotaxis and angiogenesis systems in high space dimensions. *Milan J. Math.*, 72:1–28, 2004.
- [17] Dolbeault, J. and Perthame, B. Optimal critical mass in the two-dimensional Keller-Segel model in \mathbb{R}^d . *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 339(9):611–616, 2004.
- [18] Erban, R. and Othmer, H. G. From individual to collective behavior in bacterial chemotaxis. *SIAM J. Appl. Math.*, 65(2):361–391 (electronic), 2004/05.
- [19] Evans, Lawrence C. *Partial differential equations*, vol. 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second ed., 2010.
- [20] Fontelos, M. A., Friedman, A., and Hu, B. Mathematical analysis of a model for the initiation of angiogenesis. *SIAM J. Math. Anal.*, 33(6):1330–1355 (electronic), 2002.
- [21] Gagliardo, E. Ulteriori proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili. *Ricerche Mat.*, 8:24–51, 1959.
- [22] Gajewski, H. and Zacharias, K. Global behaviour of a reaction-diffusion system modelling chemotaxis. *Math. Nachr.*, 195:77–114, 1998.
- [23] Gérard, P. Description du défaut de compacité de l’injection de Sobolev. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 3:213–233 (electronic), 1998.

- [24] Herrero, M. A. and Velázquez, J. J. L. A blow-up mechanism for a chemotaxis model. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 24(4):633–683 (1998), 1997.
- [25] Hillen, T. and Potapov, A. The one-dimensional chemotaxis model: global existence and asymptotic profile. *Math. Methods Appl. Sci.*, 27(15):1783–1801, 2004.
- [26] Jäger, W. and Luckhaus, S. On explosions of solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 329(2):819–824, 1992.
- [27] Keller, E. F. and Segel, L. A. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability. *J. Theor. Biol.*, 26:399–415, 1970.
- [28] Lieb, E. H. and Loss, M. *Analysis*, vol. 14 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second ed. , 2001.
- [29] Marrocco, A. Numerical simulation of chemotactic bacteria aggregation via mixed finite elements. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 37(4):617–630, 2003.
- [30] McCann, R. J. A convexity principle for interacting gases. *Adv. Math.*, 128(1):153–179, 1997.
- [31] Nagai, T. Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 5(2):581–601, 1995.
- [32] Nagai, T., Senba, T., and Suzuki, T. Chemotactic collapse in a parabolic system of mathematical biology. *Hiroshima Math. J.*, 30(3):463–497, 2000.
- [33] Nirenberg, L. On elliptic partial differential equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)*, 13:115–162, 1959.
- [34] Othmer, H. G., Dunbar, S. R., and Alt, W. Models of dispersal in biological systems. *J. Math. Biol.*, 26(3):263–298, 1988.
- [35] Othmer, H. G. and Hillen, T. The diffusion limit of transport equations. II. Chemotaxis equations. *SIAM J. Appl. Math.*, 62(4):1222–1250 (electronic), 2002.
- [36] Senba, T. and Suzuki, T. Chemotactic collapse in a parabolic-elliptic system of mathematical biology. *Adv. Differential Equations*, 6(1):21–50, 2001.
- [37] Sharifi tabar, M. One-dimensional chemotaxis kinetic model.

- [٣٨] Stein, E. M. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [٣٩] Stoer, J. and Bulirsch, R. *Introduction to numerical analysis*, vol. 12 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third ed. , 2002. Translated from the German by R. Bartels, W. Gautschi and C. Witzgall.

نمایه

- ا
انفجار جواب، ۱۳، ۱۸، ۳۲، ۳۶، ۳۹، ۸۳
- ب
بُرش، ۲۰، ۴۸، ۶۹
- پ
پایایی جرم، ۱۱، ۶۹
پیچش، ۵، ۳۰، ۴۰، ۵۲، ۶۹
- ت
تابعک لیاپانوف، ۱۶، ۳۰، ۳۸
تبدیل فوریه گسسته، ۴۰، ۵۰، ۷۶
تبدیل هیلبرت، ۶، ۲۸، ۵۲، ۶۳
تبدیل هیلبرت تعمیم یافته، ۶، ۴۷
- ج
جرم بحرانی، ۱۵۱۳، ۱۸، ۳۲، ۳۶، ۸۰، ۸۳
جواب سراسری، ۱۳، ۱۸، ۳۱، ۳۲، ۳۶، ۵۹
جواب ضعیف، ۱۸، ۱۹، ۲۵، ۳۲، ۳۶
- ح
حالت ایستا، ۲۴، ۳۲
- ر
روش اویلر، ۷۸
روش رانگ- کوتا، ۷۷
روش هون، ۷۸
- ش
شبیه‌سازی عددی، ۳۳، ۳۹، ۷۸
شرط کوران- فردریش- لوی، ۷۸
- ف
فشردگی، ۳۴
فضای سوبولف، ۷، ۴۴، ۴۸، ۶۳
- گ
گشتاور دوم، ۱۸، ۳۱، ۳۷، ۸۳
- ن
نابرابری گالیاردو- نیرنبرگ- سوبولف، ۸، ۲۳، ۲۴،
۲۶
نابرابری لگاریتمی هاردی- لیتلوود- سوبولف، ۸،
۱۷، ۲۲، ۳۳، ۳۸
نابرابری هاردی- لیتلوود- سوبولف، ۸، ۲۲، ۲۸
نابرابری هولدر، ۴، ۲۳
نقطه ثابت، ۱۶، ۱۹، ۲۱، ۳۲، ۶۲، ۶۳

Blow-up For Chemotaxis Models

Abstract

Moving of living organisms appears in many interesting problems, e.g. the growth of bacteria colonies, tumor growth, wound healing, color patterns of animals and etc. There are many ways to model such problems and PDE theory is widely used to investigate these problems.

In this thesis, we study two well-known classic models. First, macroscopic “Keller–Segel” model and then kinetic “Othmer–Dunbar–Alt” System. Since these models have a nice behavior in two dimensions that they don’t have in other dimensions, we propose a way to alter them such that they behave in this way in all dimensions. Also none of the known models have the suitable dynamics in one dimension, so our model has the property that it may be applied in dimension one and numerical simulations can be easily done to calculate the solutions. Also we have two chapters which are of independent interest and they are devoted to the properties of Sobolev spaces in one dimension and discrete Fourier and Hilbert transforms.

Keywords: Biology, Blow-up, Chemotaxis, Hilbert Transform, Numerical Simulation, Discrete Fourier Transform.



Sharif University of Technology
Department of Mathematical Sciences

PhD Thesis
Pure Mathematics

Blow-up For Chemotaxis Models

By
Mohsen Sharifi tabar

Supervisor
Dr. Mahmoud Hesaraki

October 6, 2010